FÍSICA 2º DE BACHILLERATO

TEMA 1: INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

Autor: Luis A. Cordón Montón
Catedrático de Física y Química
IES "Sancho III el Mayor" (Tafalla)

1. VECTORES

1.1. Magnitudes escalares y vectoriales

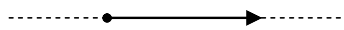
Hay magnitudes que quedan completamente determinadas dando el número con el que se expresa su medida en una unidad conveniente; dichas magnitudes se denominan ***escalares***. Por ejemplo, para especificar el volumen de un cuerpo es necesario solamente indicar cuántos metros o centímetros cúbicos ocupa; para conocer la temperatura es suficiente leer un termómetro convenientemente colocado. El tiempo, la masa, la carga y la energía son también magnitudes escalares.

Existen otras magnitudes que exigen para su completa determinación que se añada una dirección y un sentido al número con el que se expresa su medida. Este es el caso de la fuerza o de la velocidad. Decir, por ejemplo, que sobre un objeto se aplica una fuerza de 4 *N* es dar una información incompleta; es necesario indicar la dirección y el sentido de la fuerza para que quede completamente determinada. Este tipo de magnitudes se denominan ***vectoriales*** porque se pueden representar por un ente matemático denominado ***vector***.

Los vectores se pueden definir y estudiar de una manera puramente geométrica. Conocidas las matemáticas de los vectores y aplicándolas a las magnitudes vectoriales, **se obtiene una gran simplificación en el estudio de la Física**.

1.2. Concepto de vector

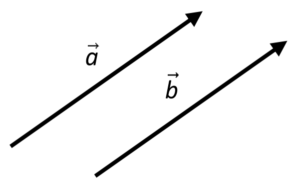
Geométricamente un ***vector*** *es un segmento de recta orientado en el espacio* (ver figura). Las características de los vectores son:



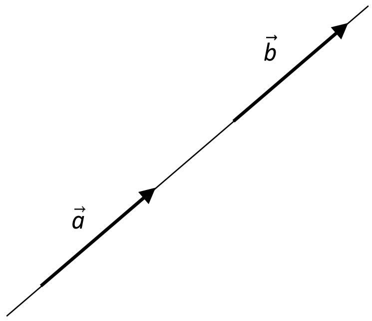
- ***Módulo***. Es la longitud del segmento.
- ***Dirección***. La de la recta que contiene al segmento.
- ***Sentido***. La orientación de la recta indicada por la punta de la flecha.
- ***Punto de aplicación u origen***. El punto donde está aplicado.

Por ejemplo, supongamos un cuerpo sometido a una fuerza de 6 *N* en una orientación dada. Entonces podemos representar a la fuerza por un vector de 6 unidades de longitud (*mm*, *cm* ...) si convenimos en que cada unidad represente, a su vez, 1 *N*. El vector lo aplicamos en el punto en el que actúa la fuerza y le asignamos su misma dirección y sentido.

Se pueden distinguir los siguientes tipos de vectores:



- ***Fijos***, *cuando su origen se aplica en un punto fijo*. Los vectores fijos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura son distintos porque, aunque tienen igual módulo, dirección y sentido, se aplican en puntos diferentes.
  Dos vectores fijos son ***equipolentes*** *si tienen igual módulo, dirección y sentido*. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura son equipolentes.
- ***Deslizantes***, *cuando no tienen definido un punto de aplicación pero sí recta de aplicación* (denominada *recta directriz*). Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura de la página siguiente son el mismo vector deslizante pues, además de tener igual módulo, dirección y sentido, están aplicados en la misma recta directriz.
  Un vector deslizante es el conjunto de todos los vectores fijos que se encuen-

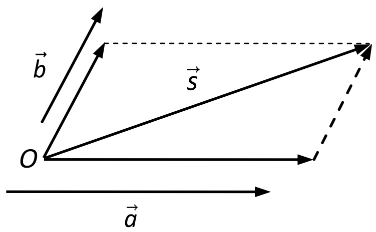


tran en la misma recta. En realidad estos vectores no se pueden dibujar puesto que no tienen definido el punto de aplicación; así, los de la figura son fijos porque están localizados en un punto concreto. Cualquier vector fijo dibujado en una recta dada representa al vector deslizante (de igual módulo, dirección y sentido) definido en dicha recta y recibe el nombre de ***representante*** del mismo.

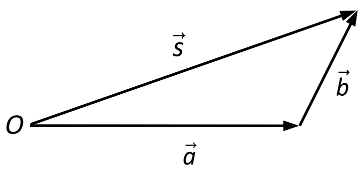
- ***Libres***, *cuando no tienen definido ni punto de aplicación ni recta de aplicación*. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de las figuras anteriores son el mismo vector libre, pues tienen igual módulo, dirección y sentido.
  Un vector libre es el conjunto de un vector fijo y todos sus equipolentes. Al igual que ocurre con los vectores deslizantes, los libres no se pueden dibujar. Cualquier vector fijo representa al vector libre de igual módulo, dirección y sentido, esto es, es un representante del mismo.

1.3. Operaciones elementales de los vectores libres

1.3.1. Suma de vectores



Regla del paralelogramo



Regla del polígono

*La **suma** $\vec{a}+\vec{b}$ de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es,* por definición, *un vector $\vec{s}$ que se obtiene eligiendo un punto O arbitrario y efectuando cualquiera de las dos construcciones indicadas en las figuras.*

De la definición de suma se desprende que *si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están en la misma recta* (esto es, si son ***colineales***), *el vector suma tiene la dirección de la recta que contiene a los vectores y que el módulo del vector suma es,*

$|\vec{s}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo sentido

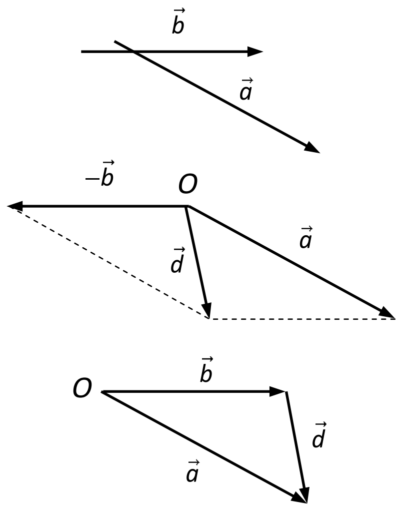
$|\vec{s}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentido opuesto y $|\vec{a}|>|\vec{b}|$

$|\vec{s}|=|\vec{b}|-|\vec{a}|$ si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen sentido opuesto y $|\vec{a}|<|\vec{b}|$

donde $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y $|\vec{s}|$ son respectivamente los módulos de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{s}$.

Se desprende, como una consecuencia de las propiedades elementales de Geometría, que el vector $\vec{s}$ no depende de la elección de punto *O*.

1.3.2. Diferencia de vectores



*La **diferencia** $\vec{a}-\vec{b}$ de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector $\vec{d}$ tal que,*

$$\vec{d}+\vec{b}=\vec{a}$$

Para obtener el vector $\vec{d}$ es suficiente sumar al vector $\vec{a}$ el ***opuesto*** al vector $\vec{b}$ (que se designa con $-\vec{b}$ y es un vector del mismo módulo y dirección que $\vec{b}$ pero de sentido opuesto). Cualquiera de las dos construcciones de las figuras prueba la afirmación anterior.

Notemos que la suma y la diferencia de vectores se han definido para vectores libres. Estas operaciones son válidas para vectores fijos que tengan punto de aplicación común. Asimismo son válidas para vectores deslizantes cuyas rectas directrices se corten.

1.3.3. Producto de un número por un vector

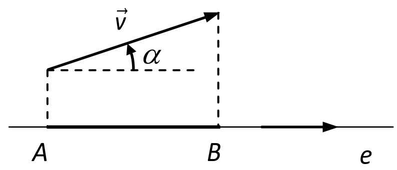
Se llama ***producto*** *de un número* λ *por un vector* $\vec{v}$, y se indica con $\lambda\vec{v}$, *al vector que tiene por módulo* $|\lambda||\vec{v}|$, *por dirección la de* $\vec{v}$, *y por sentido el de* $\vec{v}$ *o su opuesto, según que* λ *sea positivo o negativo*.

Esta operación permite considerar a un vector $\vec{v}$ como el producto de su propio módulo $|\vec{v}|$ por un vector unitario $\vec{u}$ de la misma dirección:

$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{u} \quad \text{(Si } \vec{v} \text{ y } \vec{u} \text{ tienen el mismo sentido)}$$

$$\vec{v} = -|\vec{v}|\vec{u} \quad \text{(Si } \vec{v} \text{ y } \vec{u} \text{ tienen sentido opuesto)}$$

1.3.4. Proyección de un vector sobre un eje



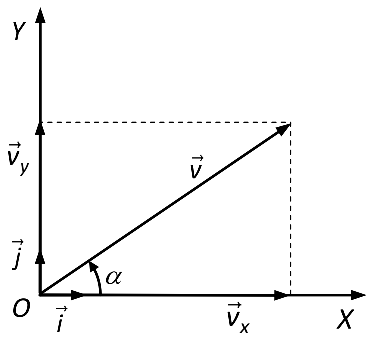
Sea *e* un ***eje***; esto es, una recta orientada. Se llama ***proyección de un vector*** $\vec{v}$ *sobre el eje e*, y se indica con la notación v_e, *a la longitud* $\overline{AB}$ *indicada en la construcción de la figura tomada con signo + ó − según que el sentido de A hacia B sea el mismo u opuesto que el del eje e*. De la figura se desprende que,

$$v_e = |\vec{v}|\cos\varphi = v\cos\alpha$$

donde φ es el ángulo formado por el eje y el vector, medido desde el eje en el sentido opuesto al de las agujas del reloj. Se puede medir φ en el sentido de las agujas del reloj si se le asigna un signo negativo.

Observa que la orientación del eje implica que α tiene que medirse desde el eje y en el sentido opuesto al de las agujas del reloj.

1.3.5. Componentes o coordenadas de un vector



Cualquier vector $\vec{v}$ localizado en el plano puede considerarse como la suma de otros dos, a los que se les conoce como ***vectores componentes*** de $\vec{v}$. Los más usados son los ***componentes rectangulares***, en los que el vector se expresa como la suma de dos vectores mutuamente perpendiculares situados en los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas (ver figura); es decir,

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Designando por v_x y v_y a las proyecciones de $\vec{v}$ en los ejes *OX* y *OY* respectivamente, se deduce de la definición de proyección de un vector sobre un eje y de la figura que,

$$v_x = v\cos\alpha \quad \text{y} \quad v_y = v\sin\alpha$$

que se cumple sea cual sea el cuadrante en el que se encuentre el vector.

Definiendo los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$ en las direcciones y sentidos de los ejes *OX* y *OY* respectivamente tenemos que,

$$\vec{v}_x = v_x\vec{i} \quad \text{y} \quad \vec{v}_y = v_y\vec{j}$$

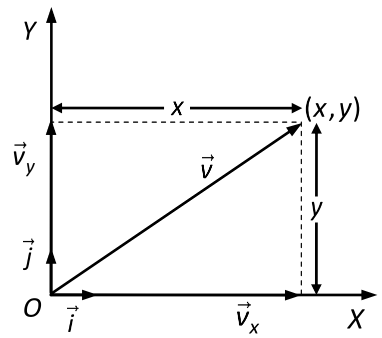
y por consiguiente,

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \text{y} \quad tg\alpha = v_y/v_x}$$

Estas expresiones ponen de manifiesto que un vector en el plano, respecto a un sistema de coordenadas dado, viene determinado por dos números que son sus componentes o coordenadas, v_x y v_y, en el sistema elegido.

En el caso particular de que un vector esté situado en uno de los ejes, por ejemplo *OX*, tenemos que $v_y = 0$, por lo que,

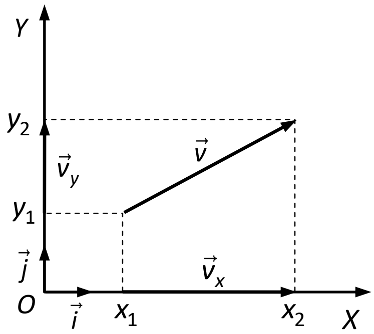
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + 0\vec{j} = v_x\vec{i}$$



de lo que se deduce que un vector localizado en uno de los ejes coordenados queda determinado por un único número: su componente o coordenada en ese eje.
El signo de la componente indica el sentido del vector y su valor numérico absoluto (sin el signo) es el módulo.

Como nos estamos refiriendo a vectores libres y siempre podemos elegir como representante de un vector libre dado a uno fijo cuyo origen se encuentra en el punto *O*, como ilustra la figura, tenemos que,

$$v_x = x \quad \text{y} \quad v_y = y$$

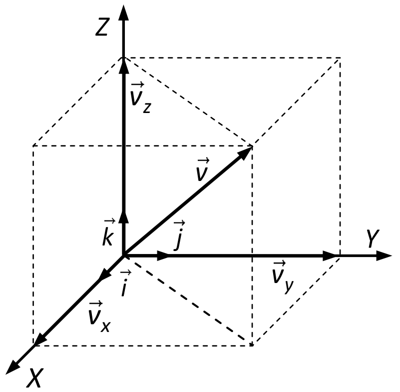


es decir, las componentes de un vector libre son siempre las coordenadas del extremo del representante del vector con punto de aplicación en el punto O del sistema de coordenadas.

En el caso de vectores fijos (ver figura), vemos que solo cuando su origen se localiza en el punto *O*, las coordenadas del extremo del vector coinciden con sus componentes. Para vectores fijos, en general, (ver figura) se tiene que,

$$v_x = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad v_y = y_2 - y_1$$

donde x_1, y_1 son las coordenadas del origen de $\vec{v}$ y x_2, y_2 las de su extremo.

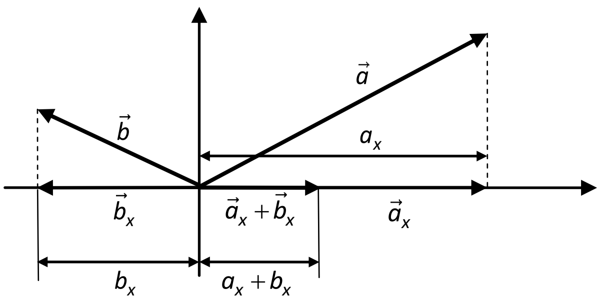


Todo lo dicho para vectores en el plano es generalizable a vectores en el espacio sin más que añadir una componente más (v_z). La figura muestra un vector en el espacio y sus componentes en un sistema de coordenadas cartesianas espaciales. La ecuación que expresa el vector en sus componentes rectangulares es ahora,

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

1.3.6. Suma de vectores en componentes

Las componentes del vector suma ($\vec{s}$) *de dos vectores* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *respecto a un sistema de coordenadas son la suma de las componentes de los vectores sumandos.*



En efecto,

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) + (\vec{b}_x + \vec{b}_y) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j})$$

pero, como se deduce de la construcción geométrica de la figura, se tiene que,

$$\vec{a}_x + \vec{b}_x = a_x\vec{i} + b_x\vec{i} = (a_x + b_x)\vec{i}$$

y lo mismo se cumple en el eje *OY*. Por lo tanto queda que,

$$\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$$

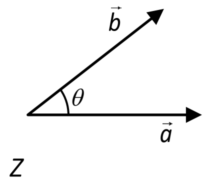
que prueba que las componentes del vector suma son la suma de las componentes de los vectores sumandos. Ya que hallar la diferencia de dos vectores es sumar a uno el opuesto del otro, es obvio que,

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j}$$

1.3.7. Producto escalar

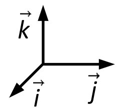
Se llama ***producto escalar*** *de un vector* $\vec{a}$ *por otro* $\vec{b}$ *y se indica con* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *(o simplemente* $\vec{a}\,\vec{b}$ *) al número p que se obtiene multiplicando el módulo de* $\vec{a}$*, el de* $\vec{b}$ *y el coseno del ángulo* $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ *que forman ambos (ver figura);* o sea,

$$p=\vec{a}\cdot\vec{b}=a\,b\cos\theta$$



Es claro que $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$, ya que en este caso el ángulo es cero. Si los vectores son perpendiculares ($\theta=\pi/2$), el producto es cero ya que $\cos\pi/2=0$. Teniendo esto en cuenta, los productos escalares de los vectores unitarios son,

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \quad \text{y} \quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$



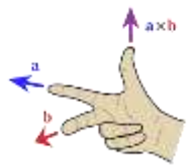
Expresando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en sus componentes rectangulares y teniendo en cuenta que el producto escalar cumple la propiedad distributiva, la expresión analítica de $\vec{a}\cdot\vec{b}$ es,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

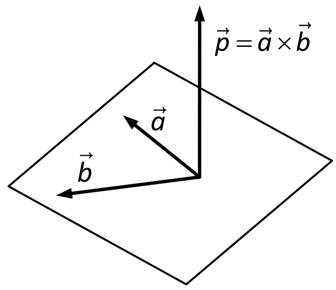
1.3.8. Producto vectorial

Se llama ***producto vectorial*** *de un vector* $\vec{a}$ *por otro* $\vec{b}$*, y se designa con* $\vec{a}\times\vec{b}$*, a un vector* $\vec{v}$ *cuyo módulo está dado por,*

$$v=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=a\,b\sin\theta$$



donde $\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ *es el ángulo que forman ambos vectores. La dirección de* $\vec{v}$ *es perpendicular al plano formado por* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$*, y el sentido está señalado por el dedo pulgar de la mano derecha cuando el índice tiene la orientación de* $\vec{a}$ *y el corazón la de* $\vec{b}$.



1.3.9. Ecuaciones vectoriales

La expresión $\vec{a}=\vec{b}$ constituye una ***ecuación vectorial*** que indica que el vector $\vec{a}$ es igual al vector $\vec{b}$. Ahora bien, si dos vectores son iguales, sus componentes respecto a un sistema de coordenadas también han de serlo, pues dichas componentes determinan unívocamente al vector, y podemos escribir que,

$$\vec{a}=\vec{b} \Rightarrow a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z \quad \text{(3 ecuaciones escalares)}$$

Por lo tanto, una ecuación vectorial en el espacio equivale a tres ecuaciones escalares usuales: las de sus componentes; ecuaciones que **sabemos resolver**. De este modo, usando las componentes de los vectores podemos resolver ecuaciones vectoriales, ecuaciones que abundan en la Física ya que muchas magnitudes sólo se pueden determinar perfectamente mediante vectores.

Lógicamente, si los vectores están localizados en el mismo plano del sistema de coordenadas, la ecuación vectorial equivale a dos escalares, pues la tercera componente es nula.

Finalmente, si los vectores están localizados en uno de los ejes coordenados, la ecuación vectorial equivale a una escalar, pues las otras dos son nulas. En este caso, como ya se ha mencionado, el vector viene determinado por un número (su componente en el eje), de modo que el valor absoluto de dicho número es el módulo del vector y su signo indica el sentido.

2. CINEMÁTICA

2.1. Introducción

En el curso pasado se inició el estudio vectorial del movimiento. Los vectores y el cálculo vectorial son una herramienta muy útil en la descripción de los movimientos curvilíneos, que son la mayoría y, además, muy importantes.

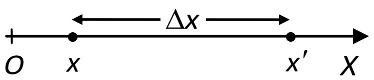
En este curso recordaremos los conceptos que ya conocemos e iremos un poco más allá. Probaremos que cualquier movimiento en el plano (espacio) siempre se puede considerar como la composición de dos (tres) movimientos rectilíneos. Las ecuaciones de estos movimientos rectilíneos, que siempre son más fáciles de obtener, determinan la ecuación del movimiento en el plano (espacio), que puede expresarse en forma vectorial.

El movimiento es un concepto relativo ya que un objeto puede estar moviéndose respecto a un segundo objeto y en reposo respecto a un tercero. Por ejemplo, el conductor de un automóvil se encuentra en reposo respecto al volante y se mueve respecto a la carretera. El estado de reposo o de movimiento de un cuerpo depende del objeto de referencia elegido; por ello decimos que el movimiento es relativo. No existe el movimiento absoluto.

El punto respecto al que se describe un movimiento particular recibe el nombre de ***punto de referencia***. Para fijar la posición de una partícula respecto al punto de referencia se necesita un sistema de coordenadas localizado en ese punto, que recibe el nombre de ***sistema de referencia***[1]**.** Si la partícula se mueve en la recta es suficiente un único eje para fijar su posición, que viene determinada por una única coordenada. Cuando el movimiento tiene lugar en el plano son necesarios dos ejes, de modo que la posición se determina por dos coordenadas. Por último, si el movimiento es en el espacio hacen falta tres ejes y la posición se precisa con tres coordenadas.

2.2. Movimiento rectilíneo

2.2.1. Desplazamiento



La figura muestra una partícula móvil moviéndose en el eje *OX* que está en la posición x en el instante inicial t y en la posición x' en el instante t'.

La variación de la posición de la partícula[2] $\Delta x = x' - x$ *recibe el nombre de* ***desplazamiento***. Observa que, $\Delta x > 0$ si $x' > x$ y que $\Delta x < 0$ si $x' < x$.

De la figura se deduce que si $\Delta x > 0$, la partícula se mueve (globalmente) en el sentido en el que se ha orientado en eje; decimos entonces que el movimiento tiene lugar en el sentido positivo del eje. Por el contrario, si $\Delta x < 0$, el movimiento es (globalmente) opuesto y decimos que tiene lugar en el sentido negativo.

---

[1]En realidad, *un sistema de referencia es el conjunto de todos los sistemas de coordenadas que se encuentran en reposo respecto al punto elegido como referencia*. Esto es así porque el movimiento de una partícula que se observa desde cada uno de ellos es el mismo. Sin embargo, por simplicidad y siempre que no dé lugar a confusión, llamaremos sistema de referencia a cualquier sistema de coordenadas fijado en el punto de referencia.

[2]Se suele utilizar la letra griega Δ (delta mayúscula) para representar la variación (es decir, el incremento) de una magnitud; así pues, la variación de *x* se escribe Δx.

2.2.2. Velocidad

Para medir la rapidez de un móvil se introduce el concepto de ***velocidad***.

Se define la ***velocidad media*** (v_m) *de la partícula en el intervalo de tiempo* Δt como *el cociente entre el desplazamiento efectuado y el intervalo de tiempo empleado;* es decir,

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x' - x}{t' - t}$$

Un valor positivo de la velocidad indica un movimiento global en el sentido positivo del eje y uno negativo revela un movimiento en sentido opuesto. De la definición se desprende que la unidad de la velocidad en el SI es el m/s.

La interpretación del cociente anterior nos lleva a afirmar que *la velocidad media* es *el desplazamiento medio realizado por unidad de tiempo en el intervalo* Δt, que es *una medida de la rapidez media con la que se desplaza la partícula*; esto es, *la rapidez media con la que cambia su posición.*

Interesa introducir una nueva magnitud, que llamaremos ***velocidad instantánea***, que mida la rapidez del movimiento en un instante particular.

La velocidad media hallada en un intervalo de tiempo Δt a partir de un instante particular t mide la rapidez media durante dicho intervalo. Entonces, si queremos obtener información sobre la rapidez en el instante t, parece razonable calcular la velocidad media (a partir de t) en un Δt tan pequeño como sea posible. Cuanto menor sea Δt, más próximo estará el valor hallado al de la medida de la rapidez en el instante t. El problema de cómo calcular el cociente $\Delta x/\Delta t$ para un Δt muy pequeño se puede resolver mediante un **proceso de paso al límite**. Los matemáticos lo llaman ***derivada*** de la función $x(t)$[3] respecto a t y se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas,

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

donde dt (leído *diferencial de t*) representa un intervalo de tiempo *infinitesimal*[4] y dx (leído *diferencial de x*) representa el desplazamiento (también infinitesimal) efectuado por la partícula en dt.

Podemos interpretar a dx/dt como *el cociente entre dx y dt;* es decir, como *la velocidad media de la partícula durante un intervalo de tiempo infinitesimal a partir de un instante particular t.* Ahora bien, la velocidad media en un intervalo Δt es una medida de la rapidez media de la partícula en Δt; entonces, si t y t' son los instantes inicial y final del intervalo, tenemos que,

$$\Delta t = t' - t \Rightarrow t' = t + \Delta t \to t, \text{ cuando } \Delta t \to 0$$

lo que significa que t y t' se confunden en el mismo instante si Δt es infinitesimal, por lo que dx/dt *es realmente una medida de la rapidez de la partícula en el instante t*[5].

---

[3]La posición de la partícula es función del tiempo, por eso se expresa como $x(t)$.

[4]Un número, por pequeño que sea, siempre es finito; por eso no debe confundirse un número muy pequeño con una cantidad infinitesimal. ***Infinitesimal*** o ***infinitésimo*** es una cantidad infinitamente próxima a cero. Leibniz entendía por cantidad infinitesimal aquella que es más pequeña que cualquier otra que podamos imaginar; en nuestro contexto lo podemos interpretar así.

[5]Observa que dice *rapidez en un instante* y no *rapidez media*. La razón es que no tiene sentido hablar

Así pues, se define la ***velocidad instantánea*** (v) *de la partícula en un instante dado* t como *la derivada de la posición respecto al tiempo en ese instante*; es decir,

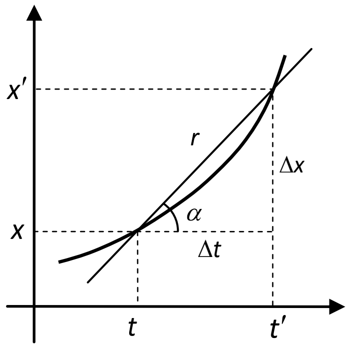
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

o bien,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

si el movimiento tiene lugar en el eje *OY*.

2.2.3. Interpretación geométrica de la velocidad



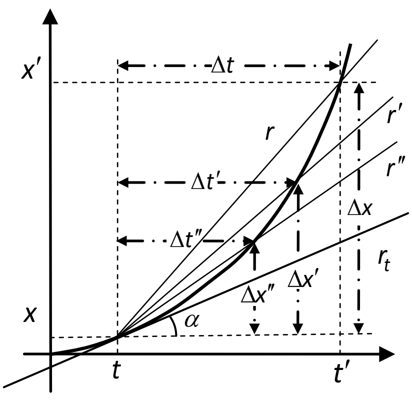
La figura muestra la gráfica *x/t* de un movimiento; es decir, el eje de abscisas representa tiempos y el de ordenadas, posiciones. La recta r es la secante a la curva entre los instantes t y t' y la tangente del ángulo α es la *pendiente* (m) de la recta; o sea

$$m = \tan\alpha = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

puesto que $v_m = \Delta x / \Delta t$, se deduce que,

$$v_m = m = \tan\alpha$$

por lo tanto, *podemos interpretar geométricamente a la velocidad media en el intervalo* $\Delta t = t' - t$ *como la pendiente de la recta secante a la gráfica x/t entre los instantes* t y t'.



Abordemos ahora la velocidad instantánea. En la figura se ve la gráfica de un movimiento en el que se realiza un desplazamiento $\Delta x = x' - x$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$; por lo tanto, se tiene que,

$$v_m = m = \tan\alpha = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

donde m es la pendiente de la recta secante r.

A medida que se consideran intervalos de tiempo menores $(\Delta t', \Delta t'', \cdots)$ los desplazamientos son también más pequeños $(\Delta x', \Delta x'', \cdots)$ y las sucesivas secantes $(r', r'', \cdots)$ se aproximan más a la recta tangente a la gráfica en el instante t (r_t), cuya pendiente es (como se ve en la figura) $m = \tan\alpha$, de modo que en el límite (cuando $\Delta t \to 0$) se confunde con ella. Así que,

$$m = \tan\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

pero como $v = dx/dt$, se deduce que,

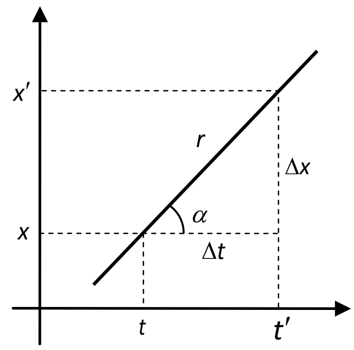
$$v = m = \tan\alpha$$

que expresa que, *desde el punto de vista geométrico, la velocidad en un instante particular es la pendiente de la recta tangente a la gráfica x/t en ese instante.*

2.2.4. Interpretación física de la velocidad

Sea un movimiento cuya representación gráfica *x/t* es una línea recta, como refleja la figura de la página siguiente. Ahora la tangente a la gráfica en cualquier ins-

de un valor medio en un instante puesto que es uno sólo; lo mismo que carece de significado el concepto *altura media* de un solo individuo.



tante es la misma y coincide con la recta que representa al movimiento. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es constante y su valor en un intervalo de tiempo Δt en el que la partícula ha efectuado un desplazamiento Δx es,

$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = cte$$

Como $v = \tan\alpha$ y $v_m = \Delta x / \Delta t$ tenemos, al combinar las ecuaciones, que,

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = cte$$

La velocidad instantánea es constante y coincide con la media[6] cuando la representación gráfica *x/t* es una línea recta. Este tipo de movimiento rectilíneo se llama ***uniforme***.
El hecho de que el cociente $\Delta x / \Delta t$ sea constante significa que el desplazamiento y el tiempo son directamente proporcionales.

Para entender el significado físico de la velocidad cuando es constante, despejemos Δx en la ecuación $v = \Delta x / \Delta t$ y hagamos $\Delta t = 1$,

$$\Delta x = v\,\Delta t = v \times 1 = v = cte$$

por lo que *la velocidad (cuando es constante) es el desplazamiento (constante) efectuado en una unidad de tiempo.* (**PI**)

Por ejemplo, si una partícula mantiene su velocidad constante e igual a 5 *m/s*, significa que recorrerá 5 *m* cada segundo.

Para entender el significado físico de la velocidad instantánea cuando cambia de un instante a otro, supongamos que la velocidad de una partícula en un instante particular *t* es, por ejemplo, de 10 *m/s*. Hagamos la siguiente pregunta: ¿qué ocurriría si mantuviera esa velocidad constante? La respuesta, de acuerdo con el párrafo anterior, es clara: a partir del instante *t* recorrería 10 *m* cada segundo. Así pues, concluimos que, *la velocidad en un instante dado t es el desplazamiento que se efectuaría, a partir de t, en una unidad de tiempo, si dicha velocidad permaneciera constante;* es decir, *si el desplazamiento fuera proporcional al tiempo.* (**PII**)

En muchos textos de Física se puede encontrar la siguiente definición de velocidad: *desplazamiento realizado (o distancia[7] recorrida) por unidad de tiempo.*
Esta definición es correcta y no se contradice con lo que se ha visto, simplemente tiene dos interpretaciones posibles:
a) Si la velocidad es *constante*, tiene el significado del párrafo **PI**
b) Si la velocidad *no es constante*, la definición se refiere a un instante particular *t* (o sea, *desplazamiento realizado por unidad de tiempo en un instante particular t*) y tiene el significado del párrafo **PII**.
Hay muchas magnitudes físicas (además de la velocidad) que se definen como la derivada de otra magnitud respecto al tiempo, por lo que *se pueden interpretar de*

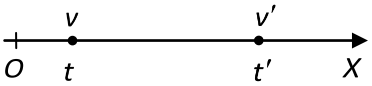
[6] Esto es análogo a la altura de un conjunto de individuos. Si todos son iguales, la altura media del conjunto coincide con la de cada uno de ellos.
[7] A veces en la definición aparece *distancia* en lugar de *desplazamiento*. No es lo mismo una cosa que otra, la distancia siempre es positiva mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo. Por lo tanto, la distancia recorrida por unidad de tiempo no es exactamente la velocidad, sino su valor absoluto que recibe el nombre de ***celeridad*** y que, al ser siempre positiva, no informa del sentido del movimiento.

forma análoga a ella. Dos de éstas son la *aceleración* (que vamos a ver en el siguiente punto) y la *potencia.*
Por ejemplo, el trabajo realizado por una fuerza es una magnitud que depende del tiempo. Su derivada respecto a éste en un instante particular es la *potencia* y, de acuerdo con el significado de derivada, mide la rapidez con la que la fuerza realiza el trabajo en ese instante; esto es, expresa el trabajo realizado por unidad de tiempo en un instante particular.

2.2.5. Aceleración

Ya que la velocidad de un móvil puede variar, parece lógico introducir una nueva magnitud que mida la rapidez de dichos cambios; esta magnitud recibe el nombre de ***aceleración***. Un movimiento se denomina ***variado*** cuando su velocidad cambia; si el valor absoluto de v (esto es, la celeridad) aumenta, se dice que es un movimiento ***acelerado*** y si disminuye, que es ***decelerado***.

Queremos que la aceleración mida la rapidez con la que cambia la velocidad, al igual que la velocidad mide la rapidez del cambio de la posición (es decir, de su desplazamiento). Por lo tanto, hay que definirla de forma análoga a la velocidad, sin más que sustituir "posición" por "velocidad". Los resultados y las interpretaciones obtenidos para la velocidad se pueden aplicar a la aceleración, cambiando "posición" por "velocidad".



Sea una partícula que se mueve en el eje *OX* de un sistema de coordenadas y que lleva una velocidad v en el instante t y una velocidad v' en otro instante t', como se ve en la figura.

Se define la ***aceleración media*** (a_m) *de la partícula en el intervalo de tiempo* Δt *como el cociente entre la variación de la velocidad* (Δv) *desde el instante* t *al* t' *y el intervalo de tiempo empleado*; es decir,

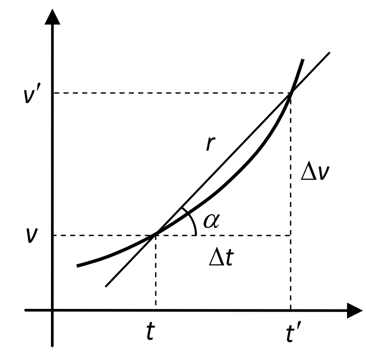
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v' - v}{t' - t} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_m > 0 \ si \ v' > v \\ a_m < 0 \ si \ v' < v \end{cases}$$

por lo que el signo de a_m indica si, globalmente, la velocidad aumenta o disminuye. De la definición se deduce que la unidad de la aceleración en el SI es el m/s^2.

Aplicando los resultados y las interpretaciones obtenidos para la velocidad media a la aceleración (cambiando "posición" por "velocidad") se concluye que:

a) *La aceleración media en el intervalo* Δt *es la variación media de la velocidad por unidad de tiempo en ese intervalo, que es una medida de la rapidez media del cambio de la velocidad.*
Ejemplo, supongamos que un móvil, cuya velocidad en el instante t = 5 *s* es 10 *m/s*, lleva una aceleración media de 3 m/s^2 durante 2 *s*. Esto significa que su velocidad aumenta por término medio en 3 *m/s* cada segundo; es decir, que su velocidad en el instante $t = 5 + 1 + 1 = 7s$ es $v = 10 + 3 + 3 = 16 m/s$. Esto no quiere decir necesariamente que la velocidad haya cambiado exactamente en 3 *m/s* cada segundo; puede pasar, por ejemplo, que aumente en 4 *m/s* el primer segundo y en 2 *m/s* el segundo; ya que el valor medio es precisamente 3.

b) Podemos interpretar geométricamente a la aceleración media en el intervalo $\Delta t = t' - t$ como *la pendiente de la recta secante a la gráfica v/t entre los ins-*



tantes t y t'; esto es (ver figura),

$$a_m = m = \tan\alpha = \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Al igual que ocurre con la velocidad, la aceleración media no informa de la rapidez del cambio de la velocidad en un instante particular. Siguiendo un proceso análogo al desarrollo en el estudio de la velocidad, concluimos que para conocer la rapidez del cambio de la velocidad en un instante t, hemos de calcular el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$ en el instante t; esto es, la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

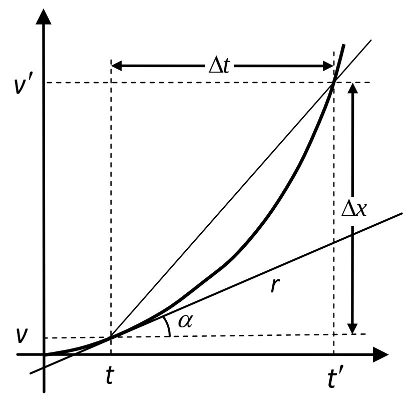
Se define la ***aceleración instantánea*** (*a) de la partícula en un instante particular t* como *la derivada de la velocidad respecto al tiempo en ese instante*; esto es,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Aplicando los resultados y las interpretaciones obtenidos para la velocidad instantánea a la aceleración (cambiando "posición" por "velocidad") concluimos:

a) *La aceleración en un instante particular t es la variación que experimentaría la velocidad del móvil, a partir de t, en una unidad de tiempo, si dicha aceleración permaneciera constante; es decir, si la variación de la velocidad fuera proporcional al tiempo.*

b) *Geométricamente, la aceleración en un instante es la pendiente de la recta tangente a la gráfica v/t en ese instante,* como se muestra en la figura.



c) En el caso particular de que la aceleración sea constante en un intervalo de tiempo Δt, se cumple que,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_m = cte$$

por lo que la aceleración instantánea coincide con la media. En este caso, *la aceleración es el cambio (constante) de la velocidad efectuado en cada unidad de tiempo.*

El hecho de que el cociente $\Delta v/\Delta t$ sea constante significa que la variación de la velocidad es directamente proporcional al intervalo de tiempo transcurrido. Este movimiento se llama ***uniformemente variado***.

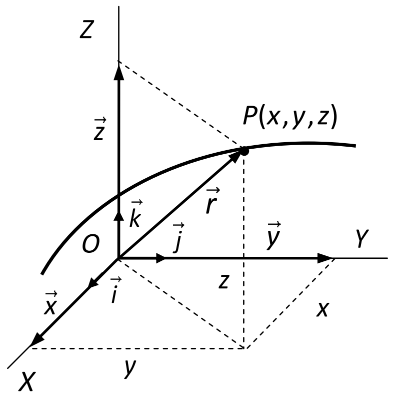
Por ejemplo, sea un móvil que en el instante t = 5 *s* lleva una velocidad de 4 *m/s* y que su aceleración es constante e igual a 2 *m/s*^{2}. Esto significa que su velocidad será de 6 *m/s* en el instante t = 6 *s*, de 8 *m/s* en t = 7 *s*, …

d) Podemos definir con palabras la aceleración como *la variación de la velocidad por unidad de tiempo.* Esta definición tiene el significado de $a = \Delta v/\Delta t$ si la aceleración es constante y el significado de $a = dv/dt$ si no lo es.

e) La derivada dv/dt en un instante particular t se puede interpretar como el cociente entre la variación infinitesimal de la velocidad (dv) y el intervalo de tiempo (también infinitesimal, dt) en el que se produce esa variación.

De las definiciones de velocidad y aceleración se deduce que el movimiento es acelerado si los signos de a y de v son iguales, y es decelerado si son distintos.
En adelante, al hablar de aceleración se entenderá que nos referimos a la instantánea.

2.3. Vector de posición y desplazamiento vectorial

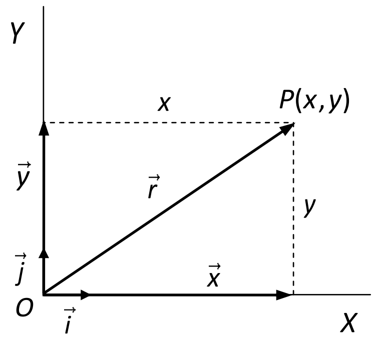


En el apartado anterior hemos definido e interpretado el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en movimiento rectilíneo a lo largo de un eje coordenado. Ahora redefiniremos estás magnitudes para poderlas aplicar al estudio del movimiento curvilíneo.

En el movimiento curvilíneo tenemos que decidir primero cómo determinar la posición del cuerpo que se mueve. Si *OXYZ* es el sistema de coordenadas utilizado por el observador *O* de la figura (sistema de referencia), la posición del punto *P* está determinada por sus coordenadas *x*, *y*, *z*. También el vector $\vec{r}$, denominado ***vector de posición***, fija la posición de *P* respecto de *O*. Expresando $\vec{r}$ en sus componentes[8] respecto al sistema *OXYZ* tenemos,

$$\vec{r}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

donde *x*, *y*, *z* son también las coordenadas de *P*.



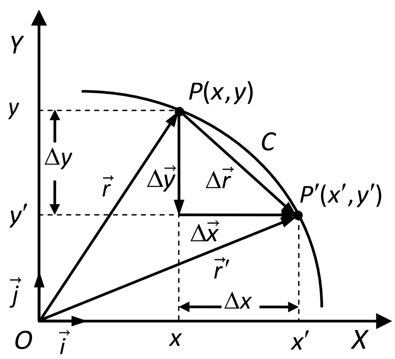
Es claro que, conforme *P* se mueve, el vector de posición cambia (lo mismo que sus tres componentes). Así pues, decimos que $\vec{r}$ es un vector función del tiempo y lo expresamos como,

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

Cuando el movimiento se da en un plano, podemos colocar los ejes *X*, *Y* de modo que sólo sean necesarias dos coordenadas (*x*, *y*) para fijar la posición de *P* (ver figura). En este caso,

$$\vec{r}(t)=\vec{x}+\vec{y}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$$

En adelante consideraremos solamente movimientos en el plano. Todos los resultados obtenidos son válidos en el espacio sin más que añadir la coordenada z.



Sea una partícula móvil que describe una trayectoria curvilínea *C*, como ilustra la figura. Los vectores de posición cuando la partícula se encuentra en los puntos *P* y *P'* son, respectivamente, $\vec{r}$ y $\vec{r}'$.

Se define el ***desplazamiento vectorial*** *desde el punto P al P' como la magnitud que queda determina cuando se conoce la distancia en línea recta entre P y P' y la dirección y el sentido del movimiento rectilíneo desde P a P'.*

Si observamos la figura, vemos que el desplazamiento puede representarse por el vector $\Delta\vec{r}$. Teniendo en cuenta las operaciones entre vectores, vemos que,

$$\vec{r}'=\vec{r}+\Delta\vec{r} \;\Rightarrow\; \Delta\vec{r}=\vec{r}'-\vec{r}$$

por lo que el *desplazamiento vectorial es la variación que sufre el vector de posición de la partícula entre los puntos P* y *P′.*

Conviene recalcar que cuando una magnitud vectorial se representa por un vector matemático, el módulo de éste representa la cantidad de magnitud. Supongamos que la distancia en línea recta entre *P* y *P′* es de 20 *km*. El módulo de $\Delta\vec{r}$ representa correctamente la cantidad de desplazamiento si, por ejemplo, convenimos en que 1 *cm* equivalga a 10 *km* y el módulo $\Delta\vec{r}$ es de 2 *cm*.
A veces, en los libros de Física se sustituye las palabras “cantidad de magnitud”

[8]En matemáticas las componentes de un vector se suelen denominar *coordenadas*.

por "magnitud". En nuestro caso "cantidad de desplazamiento" y "magnitud del desplazamiento" tienen el mismo significado.

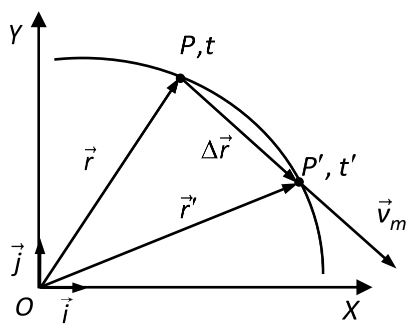
De la figura de la página anterior se deduce que,

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{x} + \Delta\vec{y} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} = (x'-x)\,\vec{i} + (y'-y)\,\vec{j}$$

donde $\Delta x = x' - x$ y $\Delta y = y' - y$ son las componentes de $\Delta\vec{r}$ en los ejes *OX* y *OY* respectivamente.

Mientras la partícula se mueve desde *P* hasta *P'*, sus proyecciones en los ejes *OX* y *OY* lo hacen, respectivamente, del punto x al x' y del punto y al y'. Así que *las componentes del desplazamiento vectorial en los ejes OX y OY del sistema de coordenadas son los desplazamientos que efectúan las proyecciones de la partícula en dichos ejes.*

2.4. Velocidad vectorial

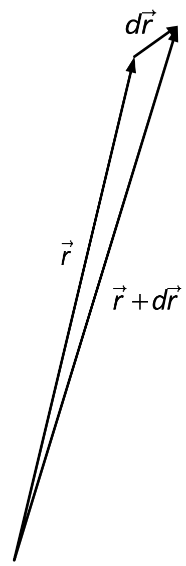


En la figura vemos la trayectoria curva de una partícula. En el instante t está en el punto *P* y su vector de posición es $\vec{r}$; en el instante t' se ha movido a P' y su vector de posición es $\vec{r}'$.

Se define la **velocidad vectorial media** ($\vec{v}_m$) en el intervalo $\Delta t = t' - t$ como el cociente entre el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ efectuado entre los instantes t y t' y el intervalo de tiempo empleado; es decir,

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

por lo que $\vec{v}_m$ *tiene la misma orientación que* $\Delta\vec{r}$. En la figura superior se ha dibujado el vector que la representa.



Se define la ***velocidad vectorial en el instante t*** ($\vec{v}$), *como el límite de la velocidad media vectorial cuando el intervalo de tiempo* Δt *tiende a cero en ese instante*; así,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Los matemáticos llaman a este límite *derivada del vector de posición* $\vec{r}(t)$ *respecto al tiempo.* En Física se expresa como,

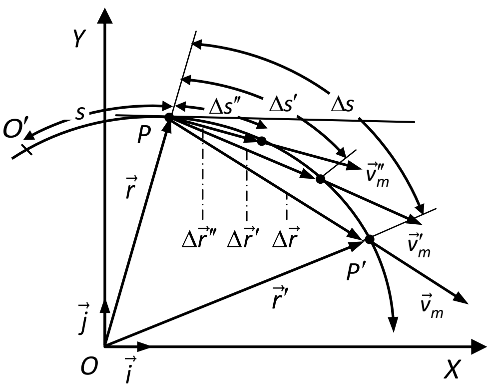
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

donde, al interpretar a la derivada como un cociente, *dt* representa un intervalo de tiempo infinitesimal y $d\vec{r}$ el desplazamiento (también infinitesimal) efectuado en *dt*, como se ilustra en la figura.

Antes de continuar es necesario idear un método para localizar la posición de una partícula en movimiento respecto a un punto arbitrario de su trayectoria. Para ello convenimos en orientar la trayectoria[9] en el sentido del movimiento y escogemos un punto *O'* de la misma como referencia (ver figura de la página siguiente). La distancia s de la partícula al punto *O*', con signo positivo si está en el lado positivo y con negativo en caso contrario, determina su posición respecto a *O*'.
Si la posición de la partícula en otro punto *P'* es s', entonces $\Delta s = s' - s$ expresa la

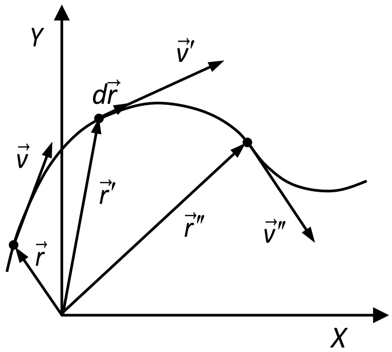
[9] En la figura la orientación está indicada con una punta de flecha.

distancia de P a P' medida a lo largo de la trayectoria y recibe el nombre de ***desplazamiento sobre la trayectoria***.



En la figura se ve que la magnitud del desplazamiento vectorial (Δr) correspondiente a un intervalo de tiempo Δt es menor que el desplazamiento realizado sobre la trayectoria Δs (que coincide con la distancia recorrida[10]), a menos que la trayectoria sea una recta. Sin embargo, si consideramos intervalos de tiempo ($\Delta t'$, $\Delta t''$, …) cada vez menores, Δr se aproxima cada vez más a Δs, y la dirección de $\Delta\vec{r}$ (que es la misma que la de $\vec{v}_m$) se acerca más y más a la dirección de la recta tangente a la curva en el punto P; de modo que en el límite, cuando $\Delta t \to 0$, la dirección de $\Delta\vec{r}$ se confunde con la de la tangente y su magnitud se confunde con la distancia real recorrida; o sea, $dr = ds$[11]. Como,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

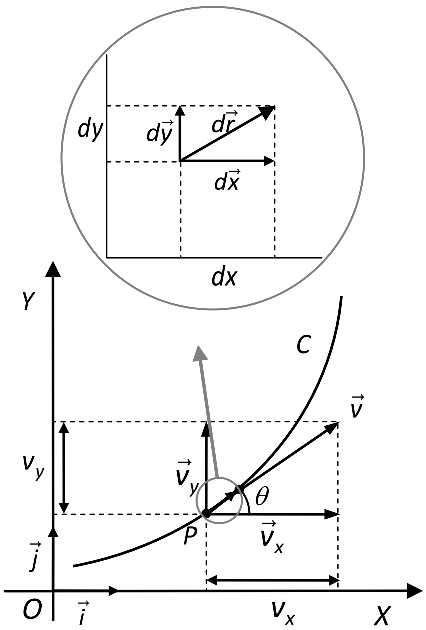


queda claro (ver figura) que *la dirección de la velocidad vectorial (que es la misma que la de $d\vec{r}$) en un punto P de la trayectoria es la de la recta tangente a la misma en ese punto*[12]; es decir*, tiene la dirección (y también el sentido) del movimiento.* La figura muestra el vector que representa a la velocidad en distintas posiciones a lo largo de una trayectoria curva C.

Veamos ahora el **significado físico de la magnitud de la velocidad** vectorial; esto es, $v = dr/dt$. Como en un intervalo de tiempo infinitesimal dt se cumple que,

$$dr = ds \Rightarrow v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

esto es, *la magnitud de la velocidad es la derivada de la posición de la partícula sobre la trayectoria,* $s(t)$, *respecto al tiempo*. Interpretando la derivada análogamente a como se hizo en el estudio de la velocidad en el movimiento rectilíneo, concluimos que, *la magnitud de la velocidad vectorial expresa la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria por unidad de tiempo en un instante t particular; es decir, mide la rapidez instantánea con la que se mueve la partícula.*



En la figura se ve una partícula que se encuentra en el punto P en el instante t y que lleva una velocidad $\vec{v}$. En un intervalo de tiempo infinitesimal dt, a partir del instante t, efectúa un desplazamiento $d\vec{r}$. Los desplazamientos, infinitesimales, realizados por las proyecciones de la partícula a lo largo de los ejes coordenados son dx y dy, por lo que la expresión,

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{x} + \Delta\vec{y} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

que hemos visto en el punto 2.3 se transforma en,

$$d\vec{r} = d\vec{x} + d\vec{y} = dx\,\vec{i} + dy\vec{j}$$

Como la velocidad vectorial instantánea es la derivada del vector de posición; tenemos, al interpretar la derivada como un cociente, que,

[10]Siempre que la partícula, que se mueve en el sentido positivo, no cambie el sentido de su marcha.

[11]Nota que se ha sustituido Δr por dr y Δs por ds porque se trata de cantidades infinitesimales.

[12]Recuerda que la dirección del movimiento en un punto de la trayectoria es la de la recta tangente a la misma en ese punto.

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}$$

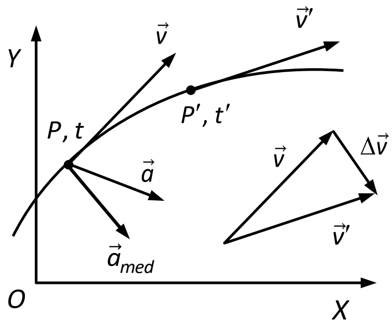
Si designamos por v_x y v_y a las componentes de $\vec{v}$, obtenemos,

$$v_x=\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad v_y=\frac{dy}{dt}$$

es decir, *las componentes de la velocidad vectorial a lo largo de los ejes coordenados son las velocidades de las proyecciones de la partícula en dichos ejes.*

2.5. Aceleración vectorial

En el movimiento curvilíneo la velocidad vectorial, en general, cambia en magnitud y en dirección. Esto sucede, por ejemplo, si aceleramos un automóvil mientras tomamos una curva. La magnitud de la velocidad cambia debido a que la partícula puede acelerar o frenar; su dirección varía porque la velocidad es tangente a la trayectoria y ésta se curva continuamente. En la figura se muestran las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ de una partícula en los instantes *t* y *t*′, cuando está en los puntos *P* y *P*′ respectivamente. La variación de la velocidad entre *P* y *P*′ es,



$$\Delta\vec{v}=\vec{v}'-\vec{v}$$

como se ve en el triángulo de vectores dibujado en la figura. Para medir la rapidez del cambio de la vector velocidad, se introduce la *aceleración vectorial*.

Se define la ***aceleración vectorial media*** *($\vec{a}_m$) en el intervalo de tiempo $\Delta t=t'-t$ como el cociente entre la variación de la velocidad $\Delta\vec{v}$ entre los instantes t y t′ y el intervalo de tiempo empleado*; es decir,

$$\vec{a}_m=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

por lo que $\vec{a}_m$ tiene la misma orientación que $\Delta\vec{v}$.

Se define la ***aceleración vectorial instantánea*** ($\vec{a}$), *en el instante t, como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero*, es decir,

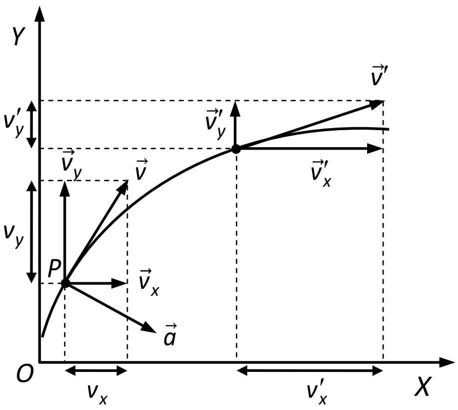
$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

que, en el lenguaje matemático, no es más que derivada de la función vectorial $\vec{v}(t)$ respecto al tiempo, que en Física se expresa como,

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

donde, si interpretamos a la derivada como un cociente, dt representa un intervalo de tiempo infinitesimal, a partir de *t*, y $d\vec{v}$ la variación (también infinitesimal) de la velocidad en dt.

La aceleración vectorial tiene la misma orientación que el cambio instantáneo de la velocidad ($d\vec{v}$). Como la dirección de ésta cambia en el sentido en que se curva la trayectoria, la aceleración en el movimiento curvilíneo apunta siempre hacia la concavidad de la curva. La figura muestra el vector que representa a la aceleración en el punto *P*; en general, no es tangencial ni perpendicular a la trayectoria.



La variación que sufre la velocidad en un intervalo Δt se puede expresar en sus componentes (ver figura) como,

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \left(v'_x\vec{i} + v'_y\vec{j}\right) - \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\right)$$

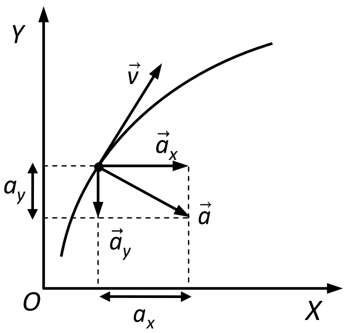
que, al agrupar términos, se transforma en,

$$\Delta\vec{v} = \left(v'_x - v_x\right)\vec{i} + \left(v'_y - v_y\right)\vec{j} = \Delta v_x\,\vec{i} + \Delta v_y\vec{j}$$

donde Δv_x y Δv_y son las componentes de $\Delta\vec{v}$ en los ejes *OX* y *OY* respectivamente. Estas componentes son también *las variaciones de las velocidades de las proyecciones de la partícula en dichos ejes*.

En un intervalo de tiempo infinitesimal dt, a partir de un instante t, la velocidad y sus componentes sufren una variación también infinitesimal, por lo que, $\Delta\vec{v}$, Δv_x y Δv_y se transforman, respectivamente en $d\vec{v}$, dv_x y dv_y. En estas condiciones la última ecuación se puede expresar como,

$$d\vec{v} = dv_x\,\vec{i} + dv_y\vec{j}$$



Como la aceleración vectorial instantánea es la derivada de la velocidad vectorial; tenemos, interpretando la derivada como un cociente,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x\,\vec{i} + dv_y\,\vec{j}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$$

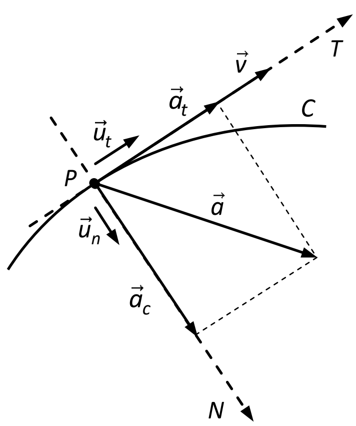
Si designamos por a_x y a_y a las componentes de $\vec{a}$ (ver figura) obtenemos que,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{y} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

es decir, *las componentes de la aceleración vectorial a lo largo de los ejes coordenados son las aceleraciones de las proyecciones de la partícula en dichos ejes.*

Hemos visto que las componentes de $\vec{r}$, $\Delta\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en los ejes coordenados son, respectivamente, las posiciones, los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones de las proyecciones de la partícula en esos ejes. Por lo tanto, *queda probado que cualquier movimiento curvilíneo puede obtenerse como la composición de movimientos rectilíneos*: dos si estamos en el plano y tres si es en el espacio.

2.6. Aceleraciones tangencial y centrípeta



La aceleración vectorial la podemos descomponer (y es muy útil hacerlo) en dos componentes: una tangencial a la trayectoria y otra perpendicular. Elijamos un sistema de coordenadas ligado a la partícula, de modo que uno de los ejes (***eje tangencial***) tenga la dirección[13] de la tangente *PT* a la trayectoria en cada punto y el otro (***eje normal***) sea perpendicular al primero y esté orientado hacia la concavidad de la curva, como ilustra la figura. Observa que este sistema es muy especial porque, al estar ligado a la partícula, los ejes cambian continuamente de dirección.

Si designamos por $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_c$, respectivamente, a las componentes (vectoriales) de $\vec{a}$ en las direcciones de dichos ejes, conocidas como ***componentes intrínsecas***,

[13]El sentido del eje tangencial puede ser cualquiera; sin embargo, mientras no se diga lo contrario, lo supondremos orientado en sentido del movimiento positivo.

tenemos que,

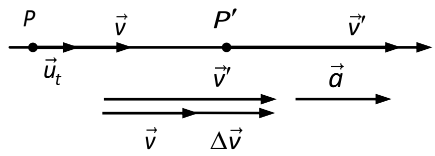
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

donde $\vec{a}_t$ se denomina ***aceleración tangencial*** y $\vec{a}_c$ ***aceleración normal*** o ***centrípeta.*** Definiendo los vectores unitarios $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$ de modo que el primero tenga la orientación del eje tangencial y el segundo la del eje normal, como se ve en la figura, entonces,

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = a_t\,\vec{u}_t + a_c\,\vec{u}_n$$

de modo que a_t y a_c son las componentes (escalares) tangencial y centrípeta de la aceleración. Cada componente tiene un significado bien definido; para entenderlo vamos a considerar dos casos particulares para generalizar después:

a) <u>Movimiento rectilíneo</u>



La figura muestra la velocidad de un movimiento rectilíneo en dos posiciones diferentes, correspondientes al intervalo $\Delta t = t' - t$. Se ve que $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ (y por lo tanto[14] $\vec{a}$) tienen siempre la dirección del movimiento; es decir la dirección tangencial. Por consiguiente, se cumple que:

$$\Delta\vec{v} = \Delta v\,\vec{u}_t \;\text{ y }\; \vec{a} = a_t\vec{u}_t$$

ya que las componentes de $\Delta\vec{v}$ y $\vec{a}$ en el eje normal son cero. Observa que Δv representa la variación de la magnitud de la velocidad en Δt.

En el límite, cuando $\Delta t \to 0$, la ecuación $\Delta\vec{v} = \Delta v\,\vec{u}_t$ se convierte en,

$$d\vec{v} = dv\,\vec{u}_t$$

por lo que al aplicar la definición de aceleración vectorial, interpretándola como un cociente de diferenciales, tenemos que,

$$\left.\begin{array}{r}\vec{a} = d\vec{v}/dt \\ \vec{a} = a_t\vec{u}_t \;\; y \;\; d\vec{v} = dv\,\vec{u}_t\end{array}\right\} \Rightarrow \; a_t\vec{u}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t \;\; \Rightarrow \;\; a_t = \frac{dv}{dt}$$

donde *v* representa la magnitud de la velocidad. Por nuestros conocimientos de derivadas sabemos que *dv/dt* mide la rapidez con la que cambia *v*. Así pues, *la aceleración tangencial (a_t) es el cambio que experimenta la magnitud de la velocidad (v) por unidad de tiempo en un instante particular*. En el caso particular de que a_t sea constante, sabemos que se ha de cumplir que,

$$\boxed{a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{si} \quad a_t = cte}$$

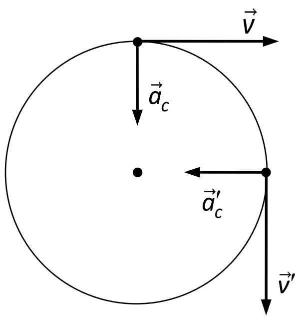
donde Δv representa el cambio experimentado en la magnitud de la velocidad y Δt el intervalo de tiempo transcurrido.

La aceleración que se definió en el estudio del movimiento rectilíneo es en realidad la aceleración tangencial. Esto es así porque en el movimiento rectilíneo la dirección de la velocidad no cambia, sólo lo hace la magnitud.

b) <u>Movimiento circular uniforme</u>

Un movimiento circular es uniforme cuando la magnitud de la velocidad vectorial permanece constante. En este caso no hay aceleración tangencial porque la mag-

[14]Recuerda que la aceleración tiene la dirección del cambio del vector velocidad.



nitud de la velocidad no se modifica. Ya que en el movimiento circular la dirección de la velocidad cambia continuamente, ha de existir aceleración; y puesto que ésta no es tangencial, tiene que ser centrípeta, como se ve en la figura.

Por lo tanto, *la aceleración centrípeta está relacionada con la rapidez con la que cambia la dirección del vector velocidad*. Un análisis detallado prueba que en el movimiento circular (sea uniforme o no) la aceleración centrípeta es,

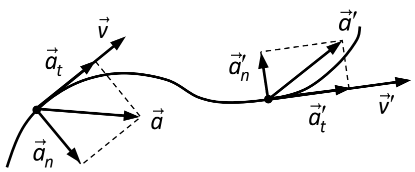
$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{R}}$$

donde v es la magnitud de la velocidad y R el radio de la circunferencia[15]. Como se aprecia en la figura de la página anterior, *la aceleración centrípeta en el movimiento circular uniforme está dirigida siempre al centro de la circunferencia*.

c) <u>Movimiento curvilíneo</u>

En general, en un movimiento con trayectoria curva cambian la dirección y la magnitud de la velocidad; por lo tanto hay aceleración tangencial y centrípeta. Entonces,

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} = a_t\,\vec{u}_t + a_c\,\vec{u}_n \\ a_t = dv/dt \ \text{y} \ a_c = v^2/R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n}$$



La figura muestra el vector que representa a la aceleración en dos posiciones distintas.

[15]Si la trayectoria no es una circunferencia, R representa el radio de curvatura, cuyo valor cambia de un punto a otro de la trayectoria.

3. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA Y DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

3.1. Introducción

La Cinemática estudia el movimiento sin atender a las causas que lo provocan. La comprensión de los movimientos es importante no sólo para nuestro conocimiento básico de la Naturaleza, sino también para las aplicaciones prácticas. Cuando comprendemos la forma en que se produce el movimiento en general, somos capaces de diseñar máquinas y otros dispositivos que se mueven como deseamos. El estudio de la relación entre el movimiento de un cuerpo y sus causas se conoce como ***Dinámica***.

La experiencia diaria prueba que el movimiento de los cuerpos es modificado[16] por otros cuerpos. Cuando un objeto modifica el movimiento de otro decimos que ha ***interaccionado*** con él. Por ejemplo, la trayectoria de un proyectil no es más que el resultado de su interacción gravitatoria. Como ya sabemos, las interacciones se expresan cuantitativamente en términos de un concepto denominado ***Fuerza***. El curso pasado definimos la fuerza operacionalmente dando un método para su medida, utilizando para ello uno de los efectos que producen: la deformación de cuerpos elásticos, tales como muelles o resortes. Además probamos experimentalmente su carácter vectorial; esto es, que las fuerzas se comportan como los vectores, por lo que son magnitudes vectoriales.

Se dice que un cuerpo está ***aislado*** cuando no está sometido a ninguna interacción. En la práctica es muy difícil que esto suceda ya que la interacción gravitatoria siempre está presente en la Tierra. Sin embargo, puede ocurrir que un cuerpo esté sometido a varias interacciones, de modo que sus efectos se cancelen y, en la práctica, se comporte como si estuviera aislado. Un ejemplo sencillo es el de un cuerpo situado en un plano horizontal; la interacción gravitatoria es contrarrestada por la reacción del plano.

En principio trataremos a los cuerpos como ***partículas***. En realidad la partícula es una aproximación simplificada de la realidad (un ***modelo***) que no siempre es satisfactorio. Cuando esto ocurre nos vemos obligados a considerar al cuerpo como un ***sistema de partículas***, que es un modelo mucho más realista. Después de todo es más real aproximar, por ejemplo, cada átomo de un cuerpo a una partícula que considerar a todo el cuerpo como una partícula.

3.2. Leyes de Newton

La Dinámica se fundamenta en tres principios fundamentales que reciben el nombre de ***leyes de Newton***, ya que fue Isaac Newton quien, en el siglo XVII, las formuló. La primera tiene que ver con los sistemas de referencia, la segunda relaciona las fuerzas con los movimientos y la tercera da cuenta de que las fuerzas actúan siempre por parejas.

El curso pasado se estudió la Dinámica suficientemente, por lo que ahora sólo vamos a recordar lo más fundamental.

[16] Modificar el movimiento de un cuerpo es cambiar su velocidad; o sea, comunicarle una aceleración.

3.2.1. Primera ley de Newton: ley de inercia

Cuando la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo es cero, el cuerpo permanece en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.

La tendencia de los cuerpos a permanecer en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme se denomina ***inercia***, por ello la primera ley de Newton también se llama ***Ley de inercia***.

La ley de inercia sólo se cumple cuando el movimiento de la partícula se observa desde un sistema de referencia no acelerado; esto es, libre de fuerzas. Tales sistemas se llaman ***sistemas inerciales de referencia***[17]. Diferentes observadores inerciales pueden estar en movimiento uniforme relativo entre sí. Por tanto, una partícula libre que está en reposo en relación a un observador inercial puede estar en movimiento uniforme respecto a otros observadores inerciales. Por ejemplo, un conductor está en reposo respecto a su automóvil pero se mueve respecto a la carretera.

Los sistemas acelerados (y, por tanto, sometidos a interacción) se llaman ***no inerciales***. La Tierra, debido a su rotación, es un sistema no inercial de referencia. No obstante, en la mayoría de los casos el efecto del movimiento terrestre es despreciable y la podemos considerar como inercial.

3.2.2. Segunda ley de Newton: ley de acción de fuerzas

Un cuerpo sobre el que actúa una fuerza o varias de resultante no nula ($\vec{F}_R$) *adquiere una aceleración* ($\vec{a}$) *de la misma dirección y sentido que es directamente proporcional a la fuerza aplicada, siendo la masa del cuerpo (m) la constante de proporcionalidad.*

Matemáticamente se puede expresar como,

$$\boxed{\vec{F}_R = m\vec{a}}$$

que recibe el nombre de ***ecuación fundamental de la Dinámica***.

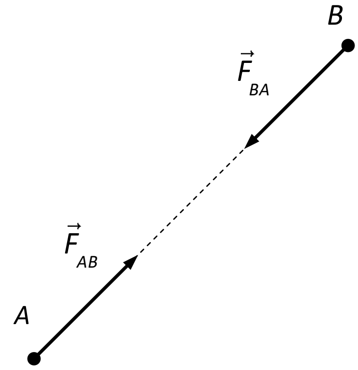
La unidad de fuerza en el SI (***Newton***) se define a través de la expresión anterior como *la fuerza que hay que aplicar a la masa de 1 kg para que adquiera una aceleración de 1 m/s^2*; esto es, $1N = 1kg \cdot 1m/s^2$

3.2.3. Tercera ley de Newton: ley de acción y reacción

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo tienen su origen en otros cuerpos que interaccionan con él. Cualquier fuerza aislada es sólo un aspecto parcial de una interacción mutua de al menos dos cuerpos. Experimentalmente se ha encontrado que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce también una fuerza sobre el primero que es igual en ***intensidad***[18] y dirección, pero de sentido opuesto. De esto se deduce que es imposible que exista una fuerza aislada en la

[17] En lo sucesivo, mientras no se diga lo contrario, todos los sistemas de referencia utilizados serán inerciales.

[18] Recuerda que la cantidad de una magnitud (escalar o vectorial) es el número con el que se expresa su medida y su unidad. Es muy normal, como ya se ha mencionado en el punto 2.3, sustituir "cantidad" por "magnitud". Sin embargo, en el caso de la fuerza se usa la palabra "intensidad" en lugar de "cantidad"; es decir, se dice "intensidad de la fuerza" en lugar de "magnitud de la fuerza".



Naturaleza. Si a una de las dos fuerzas se la denomina *acción*, a la otra se la llamará *reacción*; los nombres de acción y reacción no implican una relación de causa y efecto, sino una interacción mutua simultánea (ver figura).

Esta propiedad de las fuerzas fue enunciada por Newton en su 3ª ley del movimiento:

Si un cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{BA}$ sobre otro B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{AB}$ sobre A, que es igual y de sentido contrario a la anterior y está aplicada en la misma recta. Es decir,

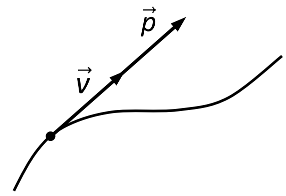
$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \Rightarrow \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = 0$$

A primera vista da la impresión de que las fuerzas de acción y reacción deberían anularse y, en consecuencia, provocar el equilibrio de los cuerpos. Esto no sucede porque actúan siempre sobre cuerpos distintos y, por lo tanto, ninguno de ellos estará en reposo, a menos que existan otras fuerzas que las anulen.

3.3. Momento lineal

En el curso anterior definimos el ***momento lineal*** $(\vec{p})$ *de una partícula en un instante como el producto de su masa (m) por su velocidad* $(\vec{v})$ *en ese instante*. O sea,

$$\vec{p} = m\vec{v}$$



que es una magnitud vectorial de la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ (ver figura) cuya unidad en el SI es el *kg·m/s*. El momento lineal permite escribir la segunda ley de Newton de otra forma. En efecto, si calculamos la derivada del momento lineal respecto al tiempo tenemos, al considerarla como un cociente, que,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

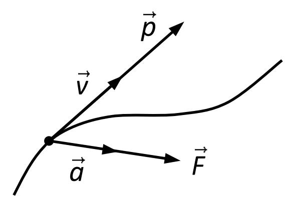
pero de acuerdo con la definición de la aceleración vectorial,

$$\vec{a} = d\vec{v} / dt$$

por lo que, sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

que da la fuerza en función del momento lineal y es la forma en la que Newton formulo su segunda ley.



La fuerza no tiene la dirección del momento lineal, sino la de la variación del mismo en cada instante, que es la dirección de la aceleración, como se ve en la figura.

3.4. Sistemas de partículas

Hasta aquí hemos tratado a los objetos como si fueran partículas, que tienen masa pero no tamaño. Ésta no es en realidad una restricción grave cuando el cuerpo lleva un movimiento de traslación simple[19], porque todos sus puntos se mueven de manera idéntica y no existen diferencias si tratamos al objeto como una partícula o

[19] En el punto cuatro se explicaran los dos movimientos simples que puede tener un cuerpo: traslación y rotación en torno a un eje.

como un cuerpo extenso. Sin embargo, no es válido para cuerpos que giran mientras se mueven (por ejemplo, la rueda de un coche), o cuando sus partes vibran unas respecto a otras (por ejemplo, dos partículas unidas por un muelle). En general, no se puede aproximar un cuerpo a una partícula si existe un movimiento relativo de unas partes de cuerpo respecto a otras.

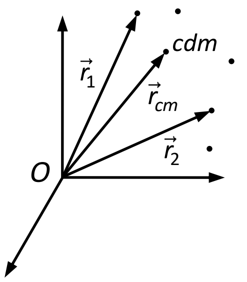
Vamos a considerar ahora el problema más realista e importante de un sistema de partículas, la teoría correspondiente se denomina ***Dinámica de los sistemas de partículas***.

Un sistema de partículas que interaccionan entre sí pero que no lo hacen con ningún cuerpo exterior al sistema se denomina ***aislado***. Las fuerzas que se ejercen entre sí las partículas del sistema se llaman ***interiores*** y las que actúan desde fuera del sistema, ***exteriores***.

Los objetos sólidos poco deformables pueden aproximarse de manera más satisfactoria a un sistema de partículas particular denominado ***sólido rígido***, que es *un sistema en el que las partículas que lo componen mantienen sus posiciones relativas fijas durante su movimiento*.

Comenzaremos el estudio de los sistemas definiendo un punto de los mismos, denominado centro de masas, que resulta de mucha utilidad.

3.4.1. Centro de masas de un sistema



Sea un sistema de partículas, como ilustra la figura. La posición de cada partícula respecto al sistema de referencia *OXYZ* viene dada por su correspondiente vector de posición.

Se llama ***centro de masas*** *(cdm) del sistema a un punto cuyas coordenadas son las componentes del vector de posición ($\vec{r}_{cm}$) definido por la siguiente expresión,*

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n +}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

donde m_1, m_2 ... son las masas de las partículas; $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots$ sus respectivos vectores de posición y M la masa total del sistema.

La ecuación anterior permite el cálculo del centro de masas de un sistema de partículas discreto; sin embargo, lo que más interesa es obtener el de un cuerpo sólido real, que se puede considerar como una distribución continua de masa. Para ello se divide el cuerpo en elementos de volumen infinitesimal, aproximando cada uno a una partícula, y se utiliza la técnica del **cálculo integral**[20].

Un resultado que se puede demostrar es que *el centro de masas de un cuerpo simétrico, continuo y homogéneo (esto es, de densidad constante) coincide con el centro de simetría del mismo que, a su vez, es su centro de gravedad*[21].

En adelante, por simplicidad, vamos a considerar sistemas formados por dos partículas. Los resultados obtenidos son aplicables a cualquier sistema, sea cual sea su número de partículas.

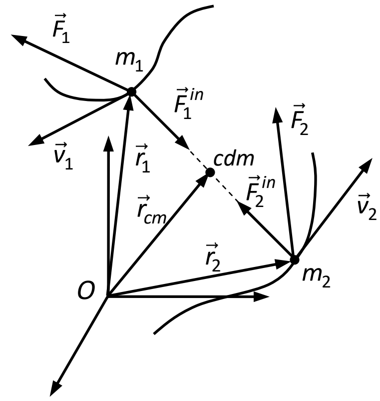
---

[20] Esta técnica se introducirá cuando se defina el concepto de *trabajo*.

[21] Punto en el que se puede considerar aplicado el peso del cuerpo.

3.4.2. Segunda ley de Newton para un sistema

Sea un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 moviéndose respecto a un sistema de referencia *OXYZ* y sometido a fuerzas exteriores e interiores, como refleja la figura. El centro de masas del sistema respecto a *O* es,



$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

El centro de masas[22] se mueve conforme el sistema se mueve. Su velocidad se obtiene derivando el vector de posición del mismo,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}\right)$$

Interpretando a la derivada como un cociente, la ecuación la podemos expresar,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)$$

pero las derivadas de los vectores de posición de las partículas son, por definición, las velocidades de las mismas, por lo que,

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

donde $\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son, respectivamente, las velocidades del centro de masas y de las partículas 1 y 2. Este resultado es generalizable para cualquier sistema de *n* partículas. Derivando de nuevo la expresión anterior tenemos, interpretando a la derivada como un cociente y recordando que la derivada de la velocidad vectorial es la aceleración vectorial, que,

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2\right)$$

donde $\vec{a}_{cm}$, $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ son, respectivamente, las aceleraciones del centro de masas y de las partículas uno y dos.

La segunda ley de Newton establece que la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual al producto de su masa por su aceleración; por lo tanto, de acuerdo con la figura anterior, tenemos,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_1^{in} = m_1\vec{a}_1 \text{ y } \vec{F}_2 + \vec{F}_2^{in} = m_2\vec{a}_2$$

donde $\vec{F}_1$, $\vec{F}_1^{in}$ y $\vec{F}_2$, $\vec{F}_2^{in}$ son, respectivamente, las fuerzas exteriores e interiores aplicadas a las partículas uno y dos. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se tiene,

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\left[\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_1^{in}\right) + \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_2^{in}\right)\right]$$

pero la tercera ley afirma que,

$$\vec{F}_1^{in} + \vec{F}_2^{in} = 0$$

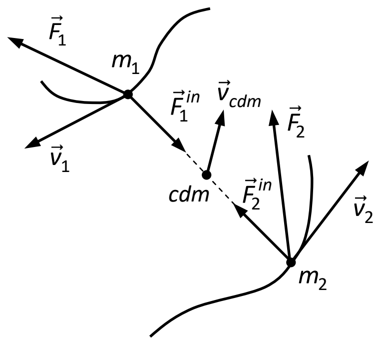
por lo tanto, finalmente queda,

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}}$$

[22]Puede probarse que el centro de masas de un sistema de dos partículas se encuentra en un punto del segmento de recta que las une y más cerca de la partícula con mayor masa. Si las masas son iguales, entonces está en el punto medio.

donde $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ es la fuerza exterior resultante que actúa sobre el sistema. La ecuación, que es generalizable a cualquier sistema de *n* partículas, se puede considerar como ***la segunda ley de Newton para un sistema de partículas***. Si comparamos la expresión anterior con la que expresa la segunda ley de Newton, concluimos que *el centro de masas de un sistema de partículas se mueve igual que una sola partícula de la misma masa sometida a la misma fuerza que la fuerza exterior resultante aplicada al sistema*.

3.4.3. Momento lineal de un sistema de partículas. Teorema de conservación



Se define el momento lineal de un sistema de partículas ($\vec{P}$) como la suma de los momentos lineales de las partículas que lo componen. En el caso particular de un sistema de dos partículas, como el de la figura, se expresaría matemáticamente así,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Combinando la ecuación con la de la velocidad del centro de masas tenemos,

$$\left.\begin{aligned} \vec{P} &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ \vec{v}_{cm} &= (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/M \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{cm}}$$

que es válida para cualquier sistema de partículas y expresa que *el momento lineal de un sistema de partículas es igual al producto de su masa por la velocidad del centro de masas*.

Derivando la ecuación anterior respecto al tiempo tenemos,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_{cm}\right) = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}$$

ya que la masa es constante y la derivada de la velocidad es la aceleración. Comparando este resultado con la segunda ley de Newton para un sistema, se deduce,

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

que es otra forma de expresar la ley. De acuerdo con la ecuación,

$$\text{Si } \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

y como esto sólo es posible (para cualquier valor de *t*) si el momento lineal es constante, queda que,

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P} = M\vec{v}_{cm} = cte}$$

que en el caso particular de un sistema de dos partículas, lleva a,

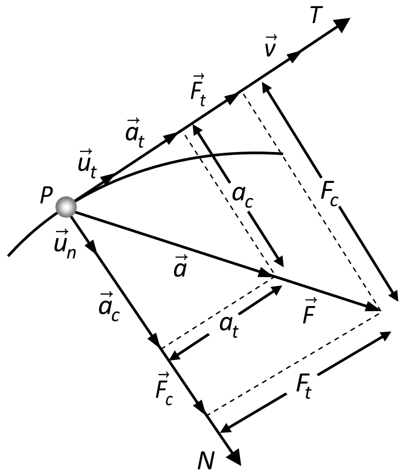
$$\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = cte$$

Este resultado recibe el nombre de ley de ***conservación del momento lineal para un sistema*** y se puede enunciar así: *un sistema aislado (esto es, un sistema cuya fuerza exterior resultante es nula) mantiene constante su momento lineal*.

Hay que entender que es el momento lineal del sistema lo que permanece constante. Los momentos lineales individuales de cada partícula sí pueden variar; es la suma de todos ellos lo que no cambia, si la fuerza exterior neta es nula.

3.5. Dinámica del movimiento curvilíneo

En el punto "aceleraciones tangencial y centrípeta", se ha visto que en el movimiento rectilíneo la aceleración tiene la dirección del movimiento; es decir, la dirección de la velocidad. Puesto que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza siempre tiene la orientación de la aceleración, concluimos que *una fuerza que actúa en la dirección de la velocidad produce un movimiento rectilíneo*. Para originar un movimiento curvilíneo, la fuerza debe formar un ángulo distinto de cero con la velocidad.



Tal y como muestra la figura, la fuerza puede descomponerse en dos componentes: una, llamada ***fuerza tangencial***, en la dirección del movimiento y otra, conocida como ***fuerza normal o centrípeta***, perpendicular al mismo; esto es,

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_c = F_t\vec{u}_t + F_c\vec{u}_n$$

donde $\vec{F}_t$ y F_t son, respectivamente, las componentes tangenciales vectorial y escalar, mientras que $\vec{F}_c$ y F_c son las componentes centrípetas vectorial y escalar.

Como, $\vec{F} = m\vec{a}$ y $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = a_t\vec{u}_t + a_c\vec{u}_n$

entonces tenemos, al expresar $\vec{F} = m\vec{a}$ en sus componentes, que,

$$F_t\vec{u}_t + F_c\vec{u}_n = m(a_t\vec{u}_t + a_c\vec{u}_c) = ma_t\vec{u}_t + ma_c\vec{u}_c$$

por lo que, recordando que $a_t = dv/dt$ y $a_c = v^2/R$, las componentes escalares tangencial y centrípeta de la fuerza son,

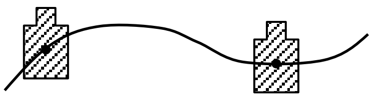
$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt} \quad y \quad F_c = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

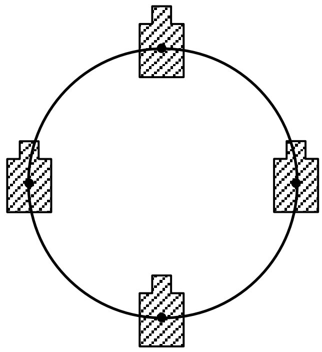
donde *v* es la magnitud de la velocidad y *R* el radio de curvatura.

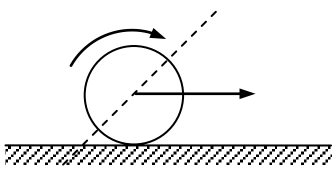
La fuerza centrípeta apunta siempre hacia el centro de curvatura en cada punto a lo largo de la trayectoria y es la responsable del cambio en la dirección del movimiento. La fuerza tangencial es la causa del cambio en la magnitud de la velocidad.
Cuando la fuerza tangencial es cero, no hay aceleración tangencial, lo que tiene como resultado un movimiento curvilíneo con la magnitud de la velocidad constante; si, además, la fuerza centrípeta es constante, el movimiento es circular. Cuando la fuerza centrípeta es cero, no hay aceleración centrípeta y el movimiento es rectilíneo.
En el caso particular de que el movimiento sea circular, el radio de curvatura *R* es constante y coincide con el radio de la circunferencia.
Observa que la fuerza $\vec{F}$ es siempre la fuerza resultante.

4. DINÁMICA DE ROTACIÓN

4.1. Introducción







Como ya se ha mencionado anteriormente, los objetos sólidos poco deformables pueden aproximarse de manera satisfactoria a un sólido rígido.

El movimiento de un sólido rígido es de ***traslación simple*** *cuando no experimenta ningún cambio en su orientación*; esto es, *cuando todas sus partículas llevan la misma velocidad.* Las dos figuras superiores muestran dos movimientos de traslación simple, uno de ellos circular.

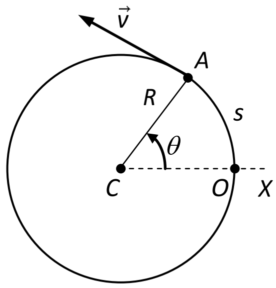
El movimiento de un sólido rígido es de ***rotación*** *cuando todas sus partículas experimentan un movimiento circular alrededor de un eje*, que puede ser de orientación fija (por ejemplo, una puerta que se abre) o variable (por ejemplo, un trompo). En este caso las partículas barren el mismo ángulo en el mismo tiempo, pero sus velocidades (en magnitud) son distintas.

Por lo general, cuando se aplican fuerzas a un cuerpo, su movimiento se puede obtener de la composición de otros dos de análisis más sencillo: uno de traslación simple y otro de rotación alrededor de un eje (fijo o variable) que pasa por su centro de masas (por ejemplo, la Tierra o la rueda de un coche, ver figura). Teniendo en cuenta que el movimiento de rotación no existe en una partícula (ya que no tiene tamaño), para describir el movimiento de un cuerpo que gira es necesario considerarlo como un sistema de partículas. En este sentido ha resultado de utilidad introducir nuevos conceptos, como los de *velocidad* y *aceleración angulares*, *momento de una fuerza y momento angular*. Estas magnitudes son también útiles para obtener información cuando se aplican a partículas con movimiento curvilíneo.

Nosotros sólo vamos a considerar rotaciones en torno a ejes fijos. Esta restricción es similar al hecho de considerar el movimiento unidimensional en la dinámica de traslación.

4.2. Movimiento circular

Este movimiento ya se estudió el curso pasado. Ahora vamos a ver una revisión del mismo y obtendremos la relación existente entre las magnitudes ***lineales***[23] (*s*, *v*, y *a*) y las ***angulares*** (θ, ω y α) de un modo diferente.



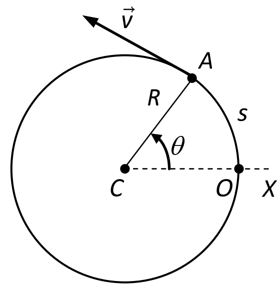
El ***movimiento circular*** *es un movimiento curvilíneo cuya trayectoria es una circunferencia*.

Por ejemplo, cuando un cuerpo gira en torno a un eje fijo, todos sus puntos describen un movimiento circular. Dado que en el movimiento de rotación de los cuerpos las partículas que lo forman llevan movimientos circulares, está claro que para el estudio de la rotación es fundamental conocer la cinemática de este tipo de movimiento.

En la figura se muestra una partícula con movimiento circular. Vemos en ella que los puntos del segmento de recta que une la partícula con el centro de la circunfe-

[23]Las magnitudes *lineales* son las que derivan de una distancia y las *angulares* las que derivan de un ángulo.

rencia tienen velocidades diferentes, pero que todos ellos barren el mismo ángulo θ en un tiempo dado. Esta es la razón por la que la magnitud ángulo y las que se derivan de ella (magnitudes angulares) son tan importantes en la descripción de este tipo de movimiento. En la figura se ve que la velocidad ($\vec{v}$), que es tangente a la circunferencia, es perpendicular al radio *R* de la misma.



Supongamos que la partícula se encuentra en el punto *A* de la figura en el instante *t*. Su posición (*s*) respecto al punto de referencia *O* queda determinada por la distancia entre *O* y *A*, tomada con signo positivo si se empieza a medir desde *O* en el sentido opuesto al movimiento de las agujas del reloj y con signo negativo si se mide desde *O* en sentido contrario. Este criterio es igualmente válido para medir ángulos desde la semirrecta de referencia *CO*,

En la figura se ve que el ángulo subtendido por el arco *s* es θ, por lo que, si el ángulo se mide en radianes[24], tenemos que,

$$s = R\theta,$$

y recordando que la magnitud de la velocidad es la derivada de *s* respecto a *t*[25], tenemos,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

ya que *R* es constante y $s = R\theta$. La cantidad,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

recibe el nombre de ***velocidad angular instantánea***[26] y, de acuerdo con el significado físico de la derivada, *es el ángulo que gira la partícula por unidad de tiempo en un instante particular t*; es decir, mide la rapidez del giro. Su unidad en el SI es el *rad/s*. Combinando las dos últimas ecuaciones, se tiene que,

$$v = \omega R$$

que expresa que en el movimiento circular, para una velocidad angular dada, la velocidad lineal es proporcional al radio.

Para medir la rapidez con que cambia la velocidad angular se introduce la ***aceleración angular instantánea***, que se define como,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

que, recordando de nuevo el significado de la derivada, *es la variación que experimenta la velocidad angular por unidad de tiempo en un instante particular t*. Su unidad en el SI es el *rad/s*^{2}.

Las aceleraciones angular y tangencial están relacionadas. Como se cumple que $v = R\omega$ y $a_t = dv/dt$, al derivar respecto al tiempo queda,

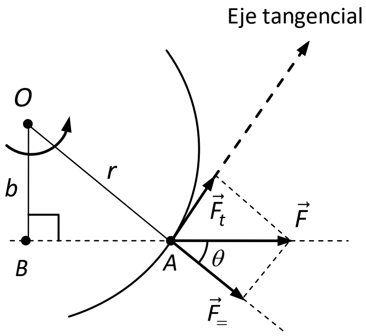
$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\cdot\alpha \;\Rightarrow\; a_T = R\cdot\alpha$$

[24]El radián es el ángulo subtendido por un arco de circunferencia igual al radio de la misma. La relación $s = R\theta$ sólo se cumple si el ángulo se mide en radianes.

[25]Siempre que el movimiento tenga lugar en el sentido positivo. Si no, sería $-v$.

[26]De la definición de ω y del convenio de signos se deduce que ω es positiva cuando el movimiento tiene lugar en el sentido opuesto al de las agujas del reloj.

4.3. Momento de una fuerza. Segunda ley de Newton para la rotación de un sólido rígido en torno a un eje fijo



Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, éste no se mueve sólo en la dirección de la fuerza sino que, normalmente, también gira alrededor de algún eje. Consideremos una fuerza $\vec{F}$ aplicada a una partícula *A* unida, por una varilla de masa despreciable, a un punto fijo *O*, como se ve en la figura. Si la varilla puede girar en torno a un eje perpendicular que pasa por *O*, entonces el efecto de la fuerza es hacer que la varilla gire alrededor de dicho eje[27].

Nuestra experiencia diaria prueba que la efectividad de la rotación de $\vec{F}$ es proporcional al producto de la intensidad de la fuerza por la distancia perpendicular $b=\overline{OB}$ del centro de rotación *O* a la *línea de acción* de la fuerza (ver figura), llamada ***brazo de la palanca***. Por ejemplo, cuando abrimos una puerta siempre tiramos lo más lejos posible de las bisagras e intentamos empujarla perpendicularmente. Esta experiencia sugiere la conveniencia de definir una nueva magnitud, conocida como ***momento de la fuerza*** *(M)*, de acuerdo con,

$$M=bF$$

Para ser coherentes con el criterio de signos adoptado en el movimiento circular, *M* se considera positivo si tiende a provocar un giro opuesto al de las agujas del reloj y negativo en caso contrario. El momento es el producto de una fuerza por una distancia, por lo que en el SI ha de expresarse en *N·m*.

En la figura se ve que $b=r\sin\theta$ y $F_t=F\sin\theta$, donde *r* es la distancia de la partícula al punto *O* y F_t la componente tangencial de la fuerza; por lo tanto,

$$M=Fr\sin\theta=rF_t$$

que pone de manifiesto que *sólo la componente tangencial de la fuerza aplicada* (F_t) *es la responsable del giro. La componente paralela* $(F_=)$ *es neutralizada por la reacción del eje fijo.*

Si aplicamos la segunda ley de Newton a la partícula *A* y tomamos la componente tangencial, tenemos que,

$$\vec{F}_R=m\vec{a} \Rightarrow F_t=ma_t$$

donde a_t es la aceleración tangencial. Ya que estamos en la rotación, deseamos obtener una ecuación que incorpore magnitudes angulares. Multiplicando los dos miembros de la ecuación por *r* y recordando que $a_t=\alpha r$, llegamos a,

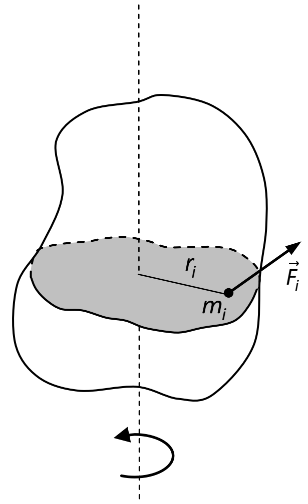
$$rF_t=rma_t \Rightarrow rF_t=mr^2\alpha$$

pero el producto rF_t es el momento de la fuerza (*M*) respecto al eje que pasa por el punto *O* y es perpendicular al plano de giro de la partícula; es decir,

$$M=rF_t \quad \Rightarrow \quad M=mr^2\alpha$$

Un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo es simplemente un conjunto de partículas individuales, cada una de las cuales está obligada a moverse en una trayectoria circular con la misma velocidad angular ω y aceleración angular α (ver figura de la página siguiente). La aplicando la ecuación anterior a la partícula *i* del sólido lleva a,

[27] Estamos suponiendo que la fuerza es perpendicular al eje.



$$M_i = m_i r_i^2 \alpha$$

donde M_i, m_i y r_i son, respectivamente, el momento de la fuerza neta aplicada sobre la partícula *i* respecto al eje de giro, su masa y su distancia al eje. La suma para todas las partículas de los dos términos de la expresión anterior conduce a,

$$\sum_i M_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha = I\alpha \quad (1)$$

ya que α es común para todas las partículas y puede salir del sumatorio.

La suma del término de la derecha se llama ***momento de inercia*** (***I***) del sólido respecto al eje de rotación y su unidad en el SI es el $kg{\cdot}m^2$; por lo tanto,

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2)$$

Esta ecuación permite el cálculo del momento de inercia de un sistema de partículas discreto; sin embargo, nosotros tratamos con cuerpos sólidos que se pueden considerar distribuciones continuas de masa. Para ello, al igual que en el centro de masas, se divide la masa en muchísimos elementos de volumen infinitesimal, aproximando cada uno a una partícula, y se utiliza la técnica del cálculo integral.
La técnica es muy útil cuando se aplica a cuerpos con elevada simetría y con su masa distribuida uniformemente. En los demás casos hay que determinar el momento de inercia de forma experimental.

La fuerza neta aplicada a cada partícula incluye las fuerzas externas e internas (las que se ejercen las partículas entre ellas). Ahora bien, puede probarse que,

los momentos de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas se anulan por pares; es decir, el momento resultante de las fuerzas internas es nulo.

Entonces, la suma del primer miembro de la ecuación (1) es, igual al momento resultante de las fuerzas externas (M_{ext}), o sea,

$$\sum_i M_i = M_{ext} \quad (3)$$

Por lo tanto, combinando las ecuaciones (1), (2) y (3), tenemos,

$$\boxed{M_{ext} = I\alpha}$$

que *es la segunda ley de Newton para la rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo*.

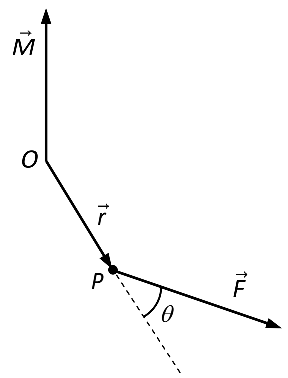
La ecuación es análoga a $F = ma$ cuando se aplica a una partícula que lleva un movimiento unidimensional (o sea, una ecuación escalar) y juega, en el movimiento de rotación, un papel idéntico. M_{ext} es la causa de la rotación, α el efecto e I la constante de proporcionalidad. En particular, la ecuación muestra que al aumentar I disminuye α, lo que indica que *el momento de inercia respecto a un eje mide la oposición que el sólido presenta a girar en torno a ese eje*; esto es, su significado es análogo al que tiene la masa en el movimiento de traslación.

Cuando $M_{ext} = 0$, de la ecuación de deduce que $\alpha = 0$, por lo que ω es constante; es decir, *la velocidad angular de un sólido que gira alrededor de un eje fijo es constante cuando el momento resultante de las fuerzas externas respecto al eje de giro es cero.*

4.4. Momento vectorial de una fuerza y momento angular de una partícula

Cuando la dirección del eje de rotación de un sólido no está fija en el espacio (como le ocurre, por ejemplo, al de un trompo), la definición de momento de una fuerza dada en el punto anterior no es satisfactoria. La razón es que su signo es insuficiente para describir el efecto de la fuerza; se necesita redefinir el momento como una magnitud vectorial. Para que la nueva definición sea coherente con lo estudiado en el punto anterior es necesario que incluya a la ecuación $M = r\,F\sin\theta$.

Por otro lado, otra magnitud vectorial fundamental en el estudio de la rotación es el *momento angular*.



Nosotros no entraremos en el estudio de la rotación de sólidos alrededor de ejes no fijos. Sin embargo, vamos a definir las magnitudes *vectoriales momento de una fuerza* y *momento angular de una partícula* porque nos van a permitir obtener una relación entre ellos que nos será de mucha utilidad más adelante.

Se define el ***momento de una fuerza*** ($\vec{M}$) *respecto a un punto O (ver figura) como el producto vectorial del vector de posición de la fuerza* ($\vec{r}$) *por la fuerza* ($\vec{F}$),

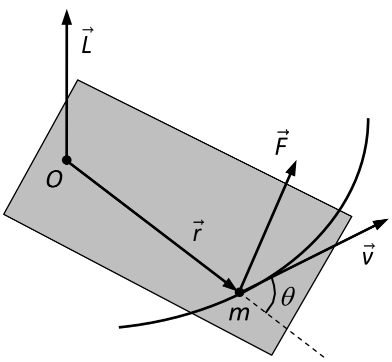
$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

De acuerdo con la definición de producto vectorial, la magnitud de $\vec{M}$ es,

$$M = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r\,F\sin\theta$$

que coincide con el momento de la fuerza definido en la rotación en torno a un eje fijo. Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial, el momento es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{F}$; esto es, al plano que contiene tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Su sentido está determinado por la regla de la mano derecha. Puesto que el momento es el producto de una fuerza por una distancia, su unidad en el Si es el $N \cdot m$.

*El **momento angular**, respecto a un punto O, de una partícula de masa m que se mueve con velocidad* $\vec{v}$ *(y por tanto con momento lineal* $\vec{p} = m\vec{v}$ *) se define como el producto vectorial del vector de posición por el momento lineal de la partícula,*



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

donde (ver figura) $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula respecto a *O*. El momento angular es, por tanto, perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Su magnitud está dada por,

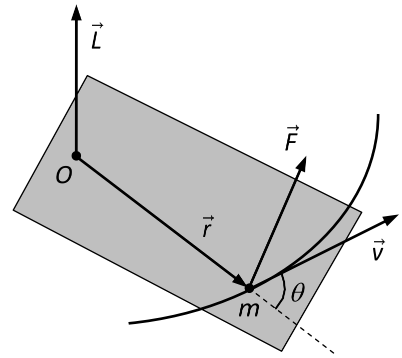
$$L = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = m\,r\,v\sin\theta$$

donde θ es el ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$. El momento angular generalmente cambia en magnitud y en dirección conforme la partícula se mueve.

Sin embargo, para una partícula que se mueve en un plano que contiene al punto O, la dirección del momento angular permanece constante y es perpendicular a dicho plano, ya que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ están contenidos en él.

De la definición se desprende que el momento angular ha de medirse en el SI en $m{\cdot}kg{\cdot}m/s = kg{\cdot}m^2/s$.

4.5. Teorema de conservación del momento angular



Vamos a deducir una relación muy importante entre el momento angular y el de una fuerza. Sea una partícula de masa *m* y velocidad $\vec{v}$ sometida a la fuerza neta $\vec{F}$ de la figura. Calculemos la derivada de $\vec{L}$ respecto a *t*,

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

ya que se trata de la derivada de un producto. Como $d\vec{r}/dt=\vec{v}$ y $\vec{p}=m\vec{v}$ es siempre paralelo a $\vec{v}$, queda que,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{v}\times m\vec{v}=0 \text{ pues } |\vec{v}\times m\vec{v}|=v\,mv\sin 0=0$$

Por otro lado, $d\vec{p}/dt=\vec{F}$ (ecuación fundamental de la Dinámica); entonces,

$$\left.\begin{array}{r} d\vec{L}/dt=\vec{r}\times d\vec{p}/dt=\vec{r}\times\vec{F} \\ \vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}}$$

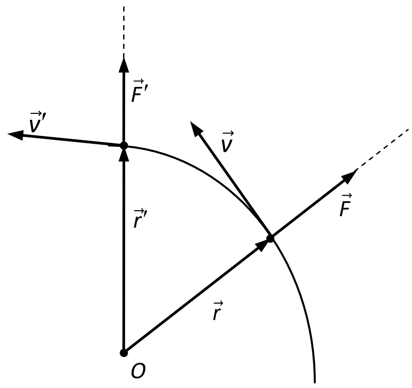
Si una partícula está sometida a una fuerza y el momento de la fuerza, respecto a un punto dado, es cero, de acuerdo con la ecuación tenemos,

$$\boxed{\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{L}=cte}$$

siempre que $\vec{L}$ se calcule respecto al mismo punto que $\vec{M}$. Este resultado se conoce con el nombre de ***conservación del momento angular para una partícula*** y se puede enunciar así:

El momento angular de una partícula respecto a un punto dado es constante (esto es, no cambia ni su magnitud ni su dirección) si el momento de la fuerza aplicada a la partícula, respecto al mismo punto, es nulo.

La condición $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$ se cumple, evidentemente, si $\vec{F}=0$ pero también si $\vec{F}$ es paralela a $\vec{r}$; en otras palabras, si la línea de acción de $\vec{F}$ pasa por el punto *O*, ya que el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo.



Una fuerza cuya dirección pasa siempre por un punto fijo en un sistema de referencia inercial se conoce como ***fuerza central*** (ver figura) *y el punto fijo se le llama* ***centro de fuerzas***.

Por lo tanto, cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, el momento angular respecto al centro de fuerzas es una constante del movimiento, y viceversa.

Este resultado es importante porque las fuerzas que aparecen en muchos sistemas naturales son centrales. Por ejemplo, la Tierra se mueve alrededor del Sol bajo la influencia de una fuerza central cuya dirección siempre pasa por el centro del Sol; así que, *el momento angular de la Tierra respecto al Sol es constante*.

5. TRABAJO Y ENERGÍA

5.1. Introducción

En el curso anterior se introdujeron los conceptos de trabajo y energía. Se trata ahora de recordar lo que ya sabemos, de generalizar resultados que se obtuvieron para casos particulares y de profundizar más, incluyendo la energía cinética y el trabajo de rotación.

La energía es, probablemente, el concepto más importante de la Física[28] y forma parte de la cultura de nuestras sociedades modernas.

Se dice que un sistema posee ***energía*** *cuando es capaz de realizar una transformación (un cambio) en sí mismo o en otros sistemas de su entorno.*

Por ejemplo, un cuerpo en movimiento posee energía (*cinética*) porque está continuamente cambiando de posición.

Aunque aparentemente la energía se manifiesta en la Naturaleza de muy distintas formas (*cinética*, *potencial*, *térmica*, *eléctrica*, *química*, *nuclear*...), todas ellas se pueden englobar en tres grandes grupos:

1. ***Energía de las partículas libres***, que corresponde a la *cinética* y a la contenida en la masa de los cuerpos, y que se puede calcular por la ecuación de Einstein $E = mc^2$.
2. ***Energía de los campos libres***, que es la asociada a las ondas electromagnéticas, como por ejemplo la luz.
3. ***Energía de interacción entre partículas y campos***, que es la que poseen los cuerpos por la posición que ocupan dentro de lo que se denomina *un campo de fuerzas*[29]. Todos los tipos de energía potencial (la gravitatoria, por ejemplo) pertenecen a este tipo.

Dos de las características fundamentales de la energía son su capacidad de transformación de unas formas a otras y de transferencia de unos cuerpos a otros. Por ejemplo, el agua embalsada en una presa (E. potencial gravitatoria) es capaz de mover la turbina de un generador eléctrico (E. cinética) que, a su vez, produce energía eléctrica que, en nuestras casas podemos transformar de nuevo en energía luminosa, térmica o cinética.

A menudo la transferencia de energía de un cuerpo a otro (o incluso en un mismo cuerpo) implica la aplicación de una fuerza que provoca un desplazamiento; esto es, un **trabajo físico**.

Como ya hemos mencionado, unos de los principios fundamentales de la Física es el de **la conservación de la energía**, que afirma que:

La energía puede transformarse (cambiar de forma) pero no puede crearse ni destruirse.

Una consecuencia directa de esto es que la energía del Universo permanece constante en el tiempo.

---

[28] La Física actual se basa en tres pilares fundamentales: la conservación del momento lineal, la conservación del momento angular y la conservación de la energía.

[29] En este curso estudiaremos de dos campos de fuerzas: el gravitatorio y el electromagnético.

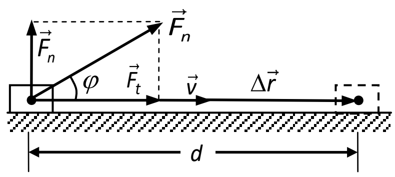
El trabajo y la energía forman parte de la Mecánica; es decir, del estudio del movimiento y sus causas. Estos conceptos nos permitirán abordar los problemas que se plantean en Mecánica desde un punto de vista diferente.

5.2. Trabajo mecánico

5.2.1. Trabajo de una fuerza constante

Es una experiencia común que al empujar un objeto sobre una superficie horizontal nos cansamos más cuanto más fuerte empujamos y cuanto mayor es la distancia que recorremos haciéndolo. Esto sugiere la introducción de un concepto que combine fuerza y distancia.

Sea el cuerpo de la figura que se mueve con velocidad $\vec{v}$ siguiendo una trayectoria recta horizontal. Le aplicamos una fuerza constante $\vec{F}$ que forma un ángulo φ con la velocidad (es decir, con la dirección y el sentido del movimiento), de forma que en un intervalo de tiempo Δt recorre una distancia d.



Se define *el trabajo* (W) *realizado por la fuerza constante, cuando el movimiento es rectilíneo, como el producto de la componente (escalar) de dicha fuerza en la dirección del movimiento* (F_t)[30] *por la distancia recorrida* (d). Matemáticamente se expresa como,

$$W = F_t d$$

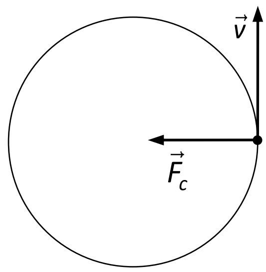
No debe sorprender que en la definición aparezca F_t y no F, ya que sólo la componente tangencial de la fuerza es efectiva para desplazar al cuerpo. La componente normal únicamente es capaz de modificar la dirección del movimiento; en el caso mostrado en la figura, la dirección del movimiento no cambia porque la normal es contrarrestada por el peso del cuerpo. De la figura se desprende que,

$$F_t = F\cos\varphi \;\Rightarrow\; W = Fd\cos\varphi$$

El trabajo es el producto de una fuerza por una distancia; en consecuencia su unidad en el SI es el $N{\cdot}m$, unidad conocida como ***Julio (J)*** que se puede definir con palabras como el *trabajo realizado por la fuerza de 1 N cuando desplaza su punto de aplicación 1 m en su misma dirección*.

Recordando el concepto de producto escalar e introduciendo el desplazamiento vectorial $\Delta\vec{r}$ (ver la figura anterior), podemos expresar el trabajo como el producto escalar,

$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}$$



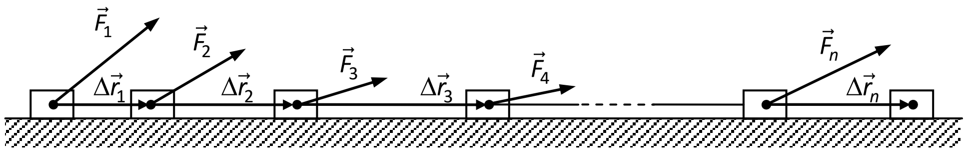
Notemos que si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, de modo que $\varphi = 90º$, el trabajo es cero (ya que $\cos 90 = 0$); éste es el caso de la fuerza centrípeta en el movimiento circular (ver figura). Si φ es mayor de 90º, el $\cos\varphi$ es negativo y también lo es el trabajo; este es el caso de las fuerzas de rozamiento, que casi siempre actúan en sentido opuesto al del movimiento. Para un cuerpo que cae, el peso hace un trabajo positivo, pero si el cuerpo se mueve hacia arriba, el trabajo del peso es negativo.

Sea un cuerpo que se mueve horizontalmente sometido a las fuerzas constantes

[30]Recuerda que esta componente recibe el nombre de tangencial. Se toma positiva si su sentido es el del movimiento.

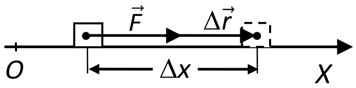
$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots \vec{F}_n$ durante los desplazamientos $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, \Delta\vec{r}_3 \ldots \Delta\vec{r}_n$ como ilustra la figura. Se define *el trabajo total de las fuerzas* $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_n$ *como la suma de los trabajos realizados por cada una de ellas*; es decir,

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r}_3$$



Notemos que la ecuación es válida sólo cuando las fuerzas son constantes y el cuerpo se mueve en línea recta. Consideraremos a continuación el caso más general de una fuerza variable.

Aunque el trabajo se puede aplicar a cualquier tipo de fuerza variable, es más útil en el caso de fuerzas cuyo valor depende de la posición que ocupa el punto sobre el que se aplica. Este es el caso que vamos a tratar.



Supongamos que el cuerpo se mueve en el eje *OX* de un sistema de coordenadas y que la fuerza actúa en la misma dirección, como se ve en la figura. En este caso particular tenemos que,

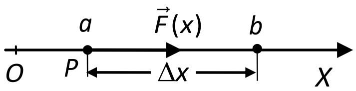
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\,\vec{i} \cdot \Delta x\,\vec{i} = F\,\Delta x \quad \text{pues} \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

donde F y Δx representan, respectivamente, las componentes escalares de la fuerza y del desplazamiento en la dirección de *OX*. Es decir, la ecuación del trabajo se puede expresar escalarmente como,

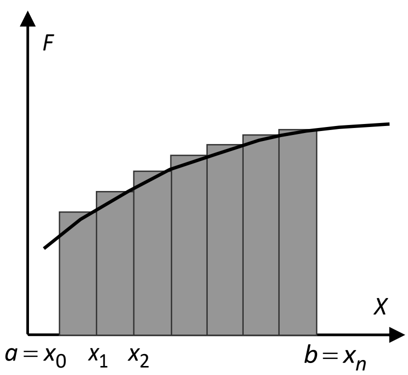
$$W = F\Delta x.$$

Observa que tanto la componente F como la de Δx son positivas si $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ están orientados en el sentido positivo del eje, en caso contrario son negativas.

5.2.2. Trabajo de una fuerza variable: caso unidimensional



Sea una partícula que se mueve en sentido positivo del eje *OX* de un sistema de coordenadas sobre la que actúa una fuerza $F(x)$[31] en la misma dirección, cuya intensidad depende de la posición; es decir, que es una función de x (ver figura). En un intervalo de tiempo Δt la partícula se mueve desde a hasta b y el desplazamiento realizado es Δx.



¿Qué trabajo realiza esta fuerza variable si la partícula se mueve desde la posición a hasta la b? En la figura se ha representado gráficamente $F(x)$ frente a x y se ha dividido Δx en n pequeños intervalos. En el primero de ellos se realiza un corto desplazamiento $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ y el valor de $F(x)$ en el punto x_1 (que es F_1) varía poco a lo largo del intervalo[32], por lo que el pequeño trabajo W_1 que se realiza en el mismo es aproximadamente,

$$W_1 \approx F_1\,\Delta x_1$$

Lo mismo sucede en el resto de los intervalos; por lo tanto, el trabajo realizado

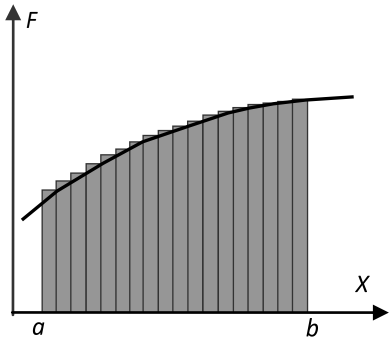
[31]Suponemos que la fuerza varía de forma continua con x; es decir, que la función $F(x)$ es continua.

[32]Puesto que $F(x)$ es una función de x y los intervalos son pequeños, x y, por lo tanto, $F(x)$ varían poco dentro de cada intervalo.

por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $a = x_0$ hasta $b = x_n$ es, aproximadamente,

$$W_a^b = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \approx F_1\,\Delta x_1 + F_2\,\Delta x_2 + \cdots + F_n\,\Delta x_n = \sum_i F_i \Delta x_i$$

donde la letra griega sigma (Σ) significa la suma de los *n* intervalos desde *a* hasta *b*, mientras que F_i y Δx_i representan la fuerza y el desplazamiento en el intervalo iésimo.

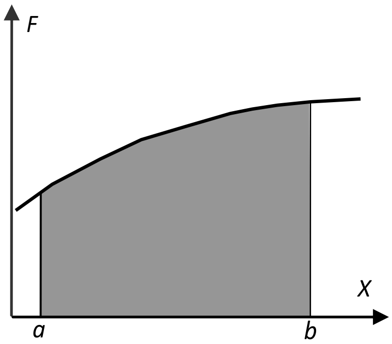


Para llevar a cabo una aproximación mejor podemos dividir el desplazamiento total en un número mayor de intervalos, como en la figura, de modo que cada Δx_i sea menor y la variación del valor de F_i en cada intervalo más pequeña. Está claro que podemos obtener mejores aproximaciones tomando Δx_i más pequeños cada vez, con el fin de tener mayor número de intervalos. Alcanzaremos el *resultado exacto* para el trabajo realizado por la fuerza si calculamos, en lugar de la suma, *el límite de la suma cuando todos los Δx_i tienden a cero*[33] (lo que implica que el número *n* de intervalos tiende a infinito); es decir,

$$W_a^b = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_i\,\Delta x_i$$

En el lenguaje matemático este límite se conoce como *integral simple de la función F*(*x*) *respecto a x desde a hasta b*, donde *a* y *b se llaman límites de la integral*. Se expresa como,

$$W_a^b = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i F_i\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx$$



Numéricamente, esta cantidad es exactamente igual al área definida entre la curva de la fuerza, el eje *OX* y los límites *a* y *b*, como se aprecia en la figura. De aquí que una integral pueda ser interpretada gráficamente como un área.

Así pues, el trabajo realizado por la fuerza *F*(*x*) cuando la partícula se desplaza en el eje *OX* desde *a* hasta *b* es igual a,

$$\boxed{W_a^b = \int_a^b F(x)dx}$$

Siempre es posible interpretar a *dx* como un desplazamiento infinitesimal y a $dW = F(x)dx$ como el trabajo infinitesimal efectuado por *F*(*x*) cuando la partícula realiza el desplazamiento *dx.*
En efecto, como *dx* es infinitesimal, $F(x) = cte$ en *dx* para valor particular de *x*, por lo que podemos aplicar la ecuación del trabajo de una fuerza constante,

$$dW = F\,dx$$

donde *dW* representa el trabajo (infinitesimal) realizado por la fuerza $F(x)$ para un valor particular de *x*. Entonces la integral se interpreta como la suma de todos los trabajos infinitesimales efectuados por la fuerza cuando *x* varía desde el punto *a* hasta *b*.

Cálculo de integrales

Se dice que la función *F*(*x*) es una primitiva de *f*(*x*) cuando la derivada de *F*(*x*) es precisamente *f*(*x*); es decir,

[33]Se demuestra en Matemáticas que a medida que Δx se va aproximando a cero, la suma se acerca más a un cierto valor, llamado *límite*, que expresa exactamente el trabajo realizado.

$$F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \text{ si } F'(x) = f(x)$$

Notemos que $G(x) = F(x) + cte$ también es una primitiva de $f(x)$ puesto que tiene la misma derivada.

Puede demostrarse que *la integral simple de una función f(x) en un intervalo* [*a, b*] *es igual a la diferencia de valores que toma cualquier función primitiva F(x) entre los puntos b* y *a*, y se expresa como,

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Sea cual sea la primitiva de $f(x)$ que elijamos el resultado es el mismo, ya que la constante se cancela. Así,

$$G(b) - G(a) = \left[F(b) + cte\right] - \left[F(a) + cte\right] = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, consideremos la siguiente integral: $\int_1^3 2x\,dx$

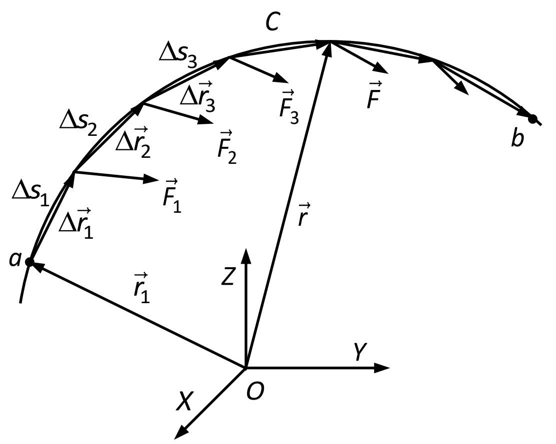
Una primitiva de $2x$ es x^2 ya que la derivada de x^2 es $2x$. Entonces

$$\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

Un resultado importante es que la integral de la suma de dos o más funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones. Esto es:

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5.2.3. Trabajo de una fuerza variable: caso bi y tridimensional



La fuerza que actúa sobre una partícula puede variar tanto en intensidad como en dirección; y la partícula puede moverse a largo de una trayectoria curva.

Sea una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva *C* respecto a un sistema de referencia *OXYZ* bajo la acción de una fuerza variable $\vec{F}$ que depende de la posición, como se ve en la figura; lo que se expresa como,

$$\vec{F} = F(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula y (x, y, z) sus coordenadas. En un intervalo de tiempo Δt, la partícula se mueve desde *a* hasta *b* y el desplazamiento realizado sobre la trayectoria *C* es Δs.

Para obtener el trabajo realizado por $\vec{F}(\vec{r})$ procedemos de una forma análoga a como se ha hecho en el caso unidimensional. Dividimos el desplazamiento total sobre la trayectoria Δs en *n* pequeños desplazamientos $\Delta s_1, \Delta s_2 \ldots \Delta s_n$, de modo que la fuerza varía poco en cada uno de ellos y sus valores casi coinciden con las magnitudes de los desplazamientos vectoriales $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2 \ldots \Delta\vec{r}_n$. Entonces, aplicando la ecuación vectorial del trabajo de una fuerza constante, tenemos que el pequeño trabajo W_1 que se realiza en el primero de los *n* desplazamiento es, aproximadamente,

$$W_1 \approx \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1$$

donde $\vec{F}_1$ es el valor de la fuerza en el último punto del desplazamiento Δs_1, que varía poco a lo largo del mismo por ser el desplazamiento muy pequeño. Lo mismo sucede con el resto de los pequeños desplazamientos; por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde *a* hasta *b* es, aproximadamente,

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \approx \vec{F}_1 \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \Delta\vec{r}_2 + \cdots + \vec{F}_n \Delta\vec{r}_n = \sum_i \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i$$

Podemos obtener mejores aproximaciones tomando $\Delta\vec{r}_i$ más pequeños cada vez, con el fin de tener mayor número de desplazamientos. Como en el caso unidimensional, alcanzaremos el *resultado exacto* para el trabajo realizado por la fuerza si hallamos, en lugar de la suma, *el límite de la suma cuando todos los* $\Delta\vec{r}_i$ *tienden a cero* (lo que implica que el número *n* de intervalos tiende a infinito); o sea,

$$W_a^b = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i \,\Delta\vec{r}_i$$

En el lenguaje matemático, este límite se conoce como integral de la función $\vec{F}(\vec{r})$ a lo largo de la línea *C* desde *a* hasta *b* y se expresa como,

$$W_a^b = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i \,\Delta\vec{r}_i = \int_{a,C}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

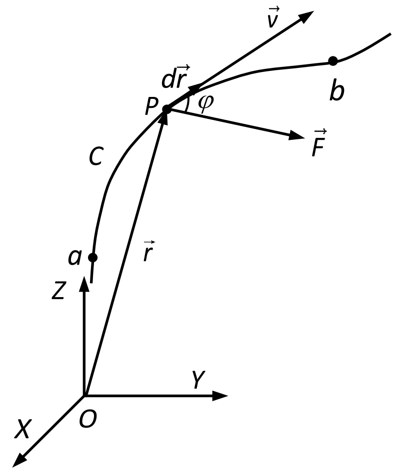
Así pues, el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ cuando la partícula se desplaza por la línea *C* desde *a* hasta *b* es igual a,

$$\boxed{W_a^b = \int_{a,C}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Como en el caso unidimensional, podemos interpretar a $d\vec{r}$ como un desplazamiento infinitesimal y a $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ como el trabajo infinitesimal realizado por la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$, para un $\vec{r}$ particular, cuando la partícula ejecuta el desplazamiento $d\vec{r}$ (ver figura). En efecto, como $d\vec{r}$ es infinitesimal, $\vec{F}(\vec{r}) = cte$ en $d\vec{r}$ y podemos aplicar la ecuación del trabajo de una fuerza constante,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

y la integral se interpreta entonces como la suma de todos los trabajos elementales efectuados por la fuerza desde *a* hasta *b*.



Al expresar $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ en sus componentes en un sistema de coordenadas dado, tenemos que,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

donde F_x, F_y y F_z son las componentes de $\vec{F}$ y *dx*, *dy* y *dz*[(34] las de $d\vec{r}$. Entonces la integral se puede expresar como,

$$W_a^b = \int_{a,C}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{a,C}^{b} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$$

Ahora bien, como la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos, se tiene,

$$W_a^b = \int_{a,C}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} F_x dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z dz$$

que son tres integrales simples que sabemos resolver. Para ello hay que expresar F_x, F_y *y* F_z en función, respectivamente, de *x*, *y* y *z*, lo no es posible a menos que

[34]Recuerda que estas componentes son los desplazamientos efectuados por las proyecciones de la partícula en los ejes coordenados cuando ésta realiza el desplazamiento $d\vec{r}$.

conozcamos la ecuación de la trayectoria *C* que sigue la partícula.

En el caso de que la fuerza esté contenida en el plano *XY*, la tercera integral se anula. Si la fuerza se aplica a lo largo del eje *OX*, se anulan las integrales segunda y tercera y el problema se reduce al caso unidimensional

5.3. Potencia

En muchas aplicaciones prácticas es más importante conocer la rapidez con que se ejecuta el trabajo que el trabajo realizado. Con este propósito se introduce el concepto de *potencia*.

Se define la ***potencia media*** *(P_m) de una fuerza durante un intervalo de tiempo Δt como el cociente entre el trabajo que realiza (W) y Δt*; esto es,

$$P_m = W/\Delta t$$

que expresa el trabajo que, por término medio, realiza la fuerza en cada unidad de tiempo. La potencia media es una medida de la rapidez media con la que se realiza el trabajo. Como se vio al estudiar el concepto de velocidad; para hallar información sobre la rapidez con la que una fuerza realiza trabajo en un instante dado *t*, tenemos que calcular el límite de la potencia media cuando $\Delta t \to 0$; esto es, hay que hallar la derivada del trabajo respecto al tiempo en el instante *t*; por tanto,

Se define la ***potencia*** *de una fuerza* ***en un instante t (potencia instantánea****, P) como la derivada del trabajo respecto al tiempo en ese instante t; esto es,*

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}}$$

Recordando la interpretación física de la derivada concluimos que *la potencia instantánea expresa el trabajo que realizaría la fuerza en una unidad de tiempo, a partir de un instante particular t, si dicha potencia se mantuviera constante* (que es una medida de la rapidez con que se realiza trabajo en el instante *t*).

Si la potencia se mantiene constante en un intervalo de tiempo Δt y el trabajo realizado en el mismo es *W*, se cumple,

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{\Delta t}$$

por lo que el trabajo realizado es proporcional al tiempo y las potencias media e instantánea coinciden; en este caso particular se habla simplemente de potencia. Al hacer $\Delta t = 1$ se ve que *la potencia constante expresa el trabajo realizado en una unidad de tiempo* (que siempre es el mismo, pues $P = cte$).

Como ocurre con la velocidad, podemos definir con palabras la potencia[35] como *el trabajo realizado por unidad de tiempo.* La definición tiene el significado de $W/\Delta t$ cuando la potencia es constante y el significado de dW/dt cuando no lo es.

Puesto que la potencia es el cociente entre un trabajo y un tiempo, su unidad en el sistema internacional es el *J/s*, que recibe el nombre de ***vatio*** *(W)*. De la ecua-

[35]La potencia que estamos viendo es la *potencia mecánica,* que es una consecuencia del trabajo mecánico. Como el trabajo es una transferencia de energía, una definición más general, que engloba a la anterior, es: *energía que libera o absorbe un agente por unidad de tiempo*. Esta definición permite ampliar el concepto para incluir las potencias eléctrica, sonora, electromagnética, etc.

ción $P = W/\Delta t$ se obtiene que *el vatio es la potencia de una fuerza que realiza el trabajo de un julio en un segundo.*

Otras unidades de potencia muy usadas son los múltiplos del vatio *kilovatio (KW)* y *megavatio (MW)*, el submúltiplo *milivatio (mW)* y el *caballo de vapor (CV)* que equivale a 735,5 *W*.

Al interpretar la derivada que define la potencia como un cociente, *dt* representa un intervalo de tiempo infinitesimal a partir de un instante particular *t* y *dW* el trabajo (también infinitesimal) realizado por la fuerza en *dt*. Entonces, como,

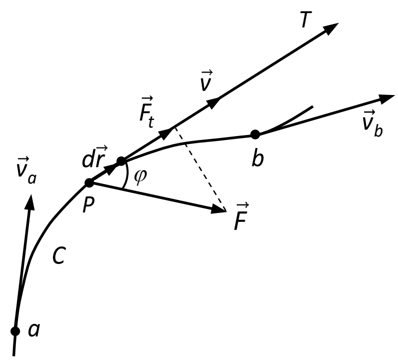
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\text{ y }\; \vec{v} = d\vec{r}/dt$$

podemos escribir la potencia como,

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \;\Rightarrow\; \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

que expresa que *la potencia es igual al producto escalar de la fuerza por la velocidad.*

5.4. Energía cinética de una partícula y de un sistema de partículas. Teorema de las fuerzas vivas



Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una curva *C* en el sentido del movimiento que hemos elegido como positivo, bajo la acción de una fuerza resultante $\vec{F}$ (ver figura). En el instante *t* se encuentra en el punto *P* y en un intervalo de tiempo infinitesimal *dt* realiza un desplazamiento (también infinitesimal) $d\vec{r}$. Como vimos en el punto "Velocidad vectorial", la dirección de $d\vec{r}$ es la de la tangente a la trayectoria en el punto *P* (o sea, la de la velocidad).

Recordando que el trabajo infinitesimal efectuado por $\vec{F}$ en el intervalo *dt* a partir del instante *t* es $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\varphi = (F\cos\varphi)dr = F_t\,dr \quad (1)$$

donde φ es el ángulo formado por $\vec{F}$ y $d\vec{r}$, y $F_t = F\cos\varphi$ la componente tangencial de $\vec{F}$ en la dirección del movimiento (ver figura).

Finalmente, teniendo en cuenta que,

$$\left.\begin{aligned} F_t &= m\,a_t \\ a_t &= dv/dt \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; F_t = m\frac{dv}{dt} \quad (2)$$

donde a_t es la aceleración tangencial y *v* la magnitud de la velocidad. Combinando las ecuaciones (1) y (2), tenemos que,

$$dW = m\frac{dv}{dt}dr$$

Si interpretamos a la derivada de la ecuación como un cociente y recordamos que

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \;\Rightarrow\; v = dr/dt$$

llegamos finalmente a,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\frac{dv}{dt}dr = m\,dv\frac{dr}{dt} = m\,v\,dv$$

Así, el trabajo realizado cuando la partícula se mueve de *a* a *b* es igual a,

$$W_a^b = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{v_a}^{v_b} mvdv = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

donde v_a y v_b son las velocidades en los puntos *a* y *b.*

Observa que la integral,

$$\int_{v_a}^{v_b} m\,v\,dv$$

es una integral simple que sabemos resolver. Se trata de la integral de la función mv ($m = cte$) respecto a v. La función primitiva es $½mv^2 + cte$ (puesto que su derivada es mv). Los límites son v_a y v_b porque se integra respecto a la magnitud de la velocidad y las velocidades en los puntos *a* y *b* son, respectivamente v_a y v_b.

La ecuación anterior expresa que el trabajo hecho sobre la partícula es igual a la diferencia de la cantidad $½mv^2$ evaluada al final y al principio de la trayectoria, que recibe el nombre de ***energía cinética*** de la partícula[36] (E_c). Por tanto,

$$\boxed{E_c = ½mv^2 \;\Rightarrow\; W_a^b = E_c(b) - E_c(a) \;\; ó \;\; W = \Delta E_c}$$

que se conoce como ***teorema de las fuerzas vivas*** o de ***la energía cinética*** para una partícula y expresa que *el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre una partícula es igual al cambio de su energía cinética.*

Éste es un resultado de cumplimiento general, válido cualquiera que sea el movimiento de la partícula y la fuerza que actúa sobre ella. El Teorema de la energía cinética pone de manifiesto que *la energía ha de medirse en las mismas unidades que el trabajo*.

Del teorema se deduce que si la fuerza resultante sobre la partícula es cero (lo que significa que no se realiza trabajo neto), la magnitud de su velocidad y, en consecuencia, su energía cinética son constantes, aun cuando cada una de las fuerzas aplicadas al cuerpo realicen un trabajo no nulo. Esto ocurre porque unas fuerzas hacen un trabajo positivo y otras uno negativo, de modo que se anulan.

Sistemas de partículas

La energía cinética de un sistema de partículas de masas m_1, m_2, m_3,... que se mueven con velocidades v_1, v_2, v_3,... es, por definición,

$$E_c = ½m_1v_1^2 + ½m_2v_2^2 + ½m_3v_3^2 + \cdots = \sum_i ½m_iv_i^2$$

En el caso particular de un sólido rígido con movimiento de traslación simple, todas las partículas llevan la misma velocidad, por lo tanto podemos sacarla del sumatorio en la ecuación y queda que,

$$E_c = ½v^2 \sum_i m_i$$

pero el segundo término del segundo miembro no es más que la masa del sólido, m, por lo que,

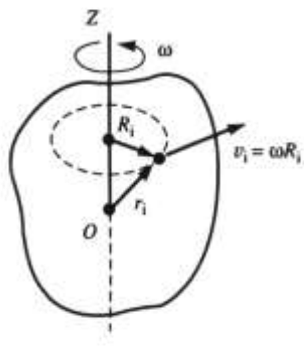
$$E_c = ½mv^2$$

Esto es*, la expresión de la energía cinética para un sólido rígido con movimiento de traslación simple es la misma que la de una partícula de su misma masa que se*

[36] Recordemos que el curso pasado se vio que la energía cinética se define de este modo porque el trabajo que puede realizar un cuerpo en virtud de su movimiento es precisamente ½ mv^2.

mueve a igual velocidad.

Sea ahora un sólido que gira alrededor de un *eje fijo* con una velocidad angular ω, como ilustra la figura. La energía cinética de la partícula *i* es,



$$E_{c,i} = ½ m_i v_i^2$$

donde v_i es la magnitud de la velocidad de la partícula y m_i su masa. Ya que todas las partículas del sólido llevan un movimiento circular,

$$v_i = \omega R_i$$

donde R_i es la distancia de la partícula *i* al eje de giro y ω la velocidad angular del sólido, que es la misma para todas sus partículas. Entonces,

$$E_{c,i} = ½ m_i v_i^2 = ½ m_i \omega^2 R_i^2$$

La energía cinética del sólido es la suma de las energías de sus partículas; esto es,

$$E_c = \sum_i ½ m_i \omega^2 R_i^2 = ½ \omega^2 \sum_i m_i R_i^2$$

ya que ω, al ser la misma para todas las partículas, puede salir del sumatorio. Teniendo en cuenta que $\sum m_i R_i^2$ es, por definición, el momento de inercia del cuerpo (I) respecto al eje de giro, queda,

$$\boxed{E_c = ½ I \omega^2}$$

que es la ecuación de la energía cinética para un sólido rígido que gira en torno a un eje fijo.

En el caso más general de un sólido que gira alrededor de un eje con orientación fija que pasa por su centro de masas y, al mismo tiempo, lleva un movimiento de traslación respecto al observador[37], la energía cinética total del mismo es,

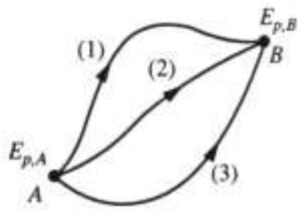
$$\boxed{E_c = E_c(tras) + E_c(rot) = ½ mv^2 + ½ I\omega^2}$$

e*l teorema de las fuerzas vivas para una partícula es válido para un sólido rígido si se tienen en cuenta las energías cinéticas de traslación y de rotación del mismo.*

5.5. Energía potencial

5.5.1. Concepto

En general, el trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula que se mueve entre dos puntos *a* y *b* por una trayectoria dada depende de la trayectoria seguida (ver figura). Sin embargo, en la naturaleza aparecen fuerzas, denominadas ***conservativas***, *cuyo trabajo no depende del camino seguido por el cuerpo sobre el que actúan, sino sólo de las posiciones inicial y final del mismo*. Las fuerzas constantes, las gravitatorias, las elásticas y las eléctricas son conservativas.



La importancia de las fuerzas conservativas radica en que el trabajo que realizan se puede expresar como la diferencia de valores que toma una función asociada a

[37]Recuerda que el movimiento de un sólido rígido siempre se puede descomponer en un movimiento de traslación de su centro de masas y otro de rotación alrededor de un eje (con orientación fija o variable) que pasa por el centro de masas.

las mismas y a la partícula sobre la que actúan, denominada **energía potencial**[38] (E_p), evaluada en los puntos inicial y final.

Entonces, para una fuerza conservativa, tenemos que,

$$W_a^b = \int_{a,c}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{a}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(a) - E_p(b)$$

sea cual sea la trayectoria de la partícula. Si se conoce la expresión de la energía potencial para una fuerza conservativa, se puede calcular el trabajo sin hacer referencia alguna a la trayectoria seguida; esto es,

$$W_a^b = E_p(a) - E_p(b)$$ [39]

como $\Delta E_p = E_p(b) - E_p(a)$ es el cambio de energía potencial, la ecuación anterior se puede escribir como,

$$\boxed{W_a^b = E_p(a) - E_p(b) = -\Delta E_p}$$

Si son varias las fuerzas conservativas aplicadas a la partícula, la E_p que aparece en la ecuación es la suma de las energías potenciales asociadas a cada fuerza.

Hay que recalcar que, sea cual sea la fuerza $\vec{F}$, la energía cinética viene dada por $E_c = ½mv^2$ y la ecuación $W = \Delta E_c$ es siempre válida. Sin embargo, la ecuación de la energía potencial depende de la naturaleza de la fuerza; no todas las fuerzas la cumplen, sólo las conservativas lo hacen.

Notemos que sólo tiene sentido hablar de diferencias de energía potencial porque la energía potencial en un punto no está definida. Esto se debe a que si sumamos una constante arbitraria, *C*, a los dos términos del segundo miembro en la ecuación anterior, la expresión queda igual porque la constante se cancela,

$$W_a^b = \left[E_p(a) + \cancel{C}\right] - \left[E_p(b) + \cancel{C}\right] = -\Delta E_p$$

Debido a esta arbitrariedad, podemos dar a la constante el valor que haga que la energía potencial sea cero en el punto más conveniente. Este punto se toma como **nivel de referencia** (cero de la regla) para medir las energías potenciales en los demás puntos.

Como hemos dicho, la fuerza gravitatoria es conservativa. Cuando se trabaja con cuerpos que se mueven cerca de la superficie terrestre, el nivel de referencia más adecuado es la propia superficie de la Tierra; por tanto, en ella la energía potencial gravitatoria se toma como cero.

Es importante destacar que la energía potencial no debe asociarse a la partícula sobre la que actúa la fuerza, sino al sistema de partículas que interaccionan.

5.5.2. *Fuerzas centrales*

En el punto 4.5 definimos el concepto de fuerza central.

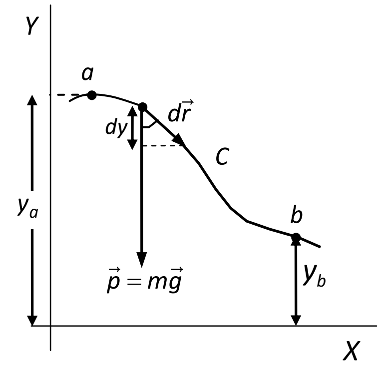
Se puede demostrar que *las fuerzas centrales cuya intensidad depende sólo de la*

[38] Como se vio el curso pasado, esta función se llama energía potencial porque el trabajo que realiza la fuerza conservativa cuando el cuerpo se mueve desde un punto *a* hasta otro *b* es $E_p(a) - E_p(b)$.
[39] Sobre el cuerpo pueden actuar varias fuerzas conservativas simultáneas. En este caso, el término E_p es la suma de las energías potenciales asociadas a cada fuerza.

distancia de su punto de aplicación al centro de fuerzas son conservativas. Este resultado es muy importante porque fuerzas tan importantes en la Naturaleza como la gravitatoria, la elástica y la eléctrica son centrales y su intensidad es función exclusiva de la distancia al centro de fuerzas; es decir, son conservativas.

5.5.3. Energía potencial gravitatoria terrestre

Vamos a restringirnos a puntos próximos a la superficie de la Tierra. En ellos la aceleración de la gravedad ($\vec{g}$) puede considerarse vertical, dirigida hacia abajo y constante; en consecuencia, la fuerza gravitatoria o peso ($\vec{P}$) que actúa sobre un cuerpo cualquiera es constante en magnitud y en dirección e independiente del punto en el que lo coloquemos; esto es,



$$\vec{P}=m\vec{g}=cte$$

Sea una partícula de masa *m* que se mueve bajo la acción de su propio peso a lo largo de una trayectoria plana *C*. Elijamos el sistema de coordenadas de modo que el movimiento tenga lugar en el plano *XY* y el eje *OX* se encuentre sobre la superficie terrestre, como se ve en la figura. El trabajo realizado por el peso cuando la partícula se mueve desde un punto *a* a otro *b* es,

$$W_a^b=\int_{a,C}^{b}\vec{P}\cdot d\vec{r}$$

pero la integral de línea es igual a la suma de las integrales de las componentes de la fuerza del peso; por lo tanto,

$$W_a^b=\int_{a,C}^{b}\vec{P}\cdot d\vec{r}=\int_{x_a}^{x_b}P_x dx+\int_{y_a}^{y_b}P_y dy$$

Ahora bien, como se deduce de la figura,

$$P_x=0 \quad \text{y} \quad P_y=-mg$$

por lo que, teniendo en cuenta que *m* y *g* son constantes y pueden salir de la integral, queda que,

$$W_a^b=\int_{y_a}^{y_b}-mg\,dy=-mg\int_{y_a}^{y_b}dy=-mg\left[y\right]_{y_a}^{y_b}=mgy_a-mgy_b$$

que pone de manifiesto que el trabajo no depende de la trayectoria, sino de las posiciones de los puntos inicial y final (en realidad de la coordenada *y*). Esto significa que la fuerza gravitatoria en las proximidades de la superficie de la Tierra es conservativa. Comparando la expresión anterior con la ecuación general de la energía potencial y teniendo en cuenta que la coordenada *y* es la altura de la partícula (*h*), se deduce que,

$$E_p(a)-E_p(b)=mgy_a-mgy_b=mgh_a-mgh_b$$

La energía potencial gravitatoria de una partícula de masa *m* situada a una altura *h* viene, pues, dada por,

$$E_p(h)=mgh+C$$

En el caso particular de que *m* se encuentre en la superficie terrestre (*h = 0*), tenemos que,

$$E_p(0)=C$$

entonces, si hacemos $C = 0$, se tiene que $E_p(0) = 0$ para cualquier partícula situada en la superficie terrestre; lo que permite tomarla como nivel de referencia para medir las energías potenciales de los cuerpos próximos a dicha superficie, que será igual a,

$$\boxed{E_p(h) = mgh}$$

En el caso de un sólido rígido *la energía potencial se define como la suma de las energías potenciales de las partículas que lo componen*. Sin embargo, aún podemos seguir utilizando la ecuación si medimos la altura desde el ***centro de gravedad*** del cuerpo, *que es el punto en el que se puede considerar que está aplicado el peso del mismo* y que, para puntos próximos a la superficie terrestre, coincide con el centro de masas.

Se puede tomar como referencia para medir la energía potencial gravitatoria el plano paralelo a la superficie terrestre que más convenga en cada caso. La única condición es que la altura del cuerpo se mida respecto a dicho plano.

5.6. Energía mecánica. Teorema de conservación

Cuando sobre una partícula actúa una sola fuerza que es conservativa y realiza un trabajo no nulo, tenemos que,

$$W_a^b = E_p(a) - E_p(b)$$

donde *a* y *b* son, respectivamente, las posiciones inicial y final de la partícula. Por otro lado, el teorema de las fuerzas vivas afirma que el trabajo realizado por la fuerza es igual a la variación de la energía cinética; esto es,

$$W_a^b = E_c(b) - E_c(a)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores queda que,

$$E_p(a) - E_p(b) = E_c(b) - E_c(a) \Rightarrow E_p(a) + E_c(a) = E_p(b) + E_c(b)$$

La magnitud $E_p + E_C$ se denomina ***energía mecánica*** de la partícula y se denota por E_m; así que,

$$\boxed{E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow \Delta E_m = 0}$$

que afirma que, *cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, su energía mecánica permanece constante durante el movimiento.*

En los movimientos bajo este tipo de fuerzas, la energía cinética y la potencial pueden variar, pero siempre de forma tal que su suma permanece constante. Por tanto, si aumenta la energía cinética, la energía potencial ha de disminuir en la misma cantidad, y viceversa.

La conservación de la energía mecánica es válida para un sólido rígido sobre el que sólo actúan fuerzas conservativas. En este caso hay que tener en cuenta que la energía cinética del mismo es la suma de dos: traslación y rotación, o sea,

$$E_c = ½mv^2 \quad \text{para una partícula}$$

$$E_c = E_c(tras) + E_c(rot) = ½mv^2 + ½I\omega^2 \quad \text{para un sólido rígido}$$

5.7. Fuerzas no conservativas y disipativas

En la naturaleza también existen fuerzas no conservativas; esto es, fuerzas cuyo trabajo depende de la trayectoria seguida por el cuerpo sobre el que actúan; el rozamiento es un ejemplo típico de este tipo de fuerzas. Sobre un cuerpo se pueden aplicar fuerzas conservativas y no conservativas al mismo tiempo.

Consideremos una partícula sometida a fuerzas conservativas y no conservativas. Cuando se mueve desde un punto *a* a otro *b*, el trabajo total realizado (W) es la suma de los trabajos realizados por las fuerzas conservativas (W_c) y no conservativas (W_{nc}); esto es,

$$W_a^b = W_c + W_{nc}$$

pero de acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas,

$$W_a^b = W_c + W_{nc} = E_c(b) - E_c(a)$$

y de acuerdo con el teorema de la energía potencial,

$$W_c = E_p(a) - E_p(b)$$

por lo que combinando las tres ecuaciones queda,

$$E_c(b) - E_c(a) = E_p(a) - E_p(b) + W_{nc} \Rightarrow W_{nc} = \left[E_c(b) + E_p(b)\right] - \left[E_c(a) + E_p(a)\right]$$

y teniendo en cuenta que $E_m = E_c + E_p$ se obtiene,

$$\boxed{W_{nc} = E_m(b) - E_m(a) = \Delta E_m}$$

que expresa *que la energía mecánica de la partícula no se mantiene constante cuando actúan sobre ella fuerzas no conservativas. El trabajo de las fuerzas no conservativas aplicadas a una partícula es igual a la variación de la energía mecánica de la misma.*

El resultado es aplicable un sólido rígido si se tiene en cuenta sus energías cinéticas de traslación y rotación.
Es importante destacar **que la ecuación anterior es válida igualmente cuando el trabajo lo realiza una fuerza conservativa de la que no conocemos su energía potencial. En este caso tratamos a la fuerza como si fuera no conservativa.**

En el caso particular de que la fuerza no conservativa sea la de rozamiento, que actúa siempre en sentido opuesto al movimiento, el trabajo que realiza es negativo; por lo que la energía mecánica disminuye. Un análisis detallado del cuerpo sobre el que se aplica y de su entorno revela que la energía no ha desaparecido, sino que se ha transformado en *energía térmica* (el cuerpo y parte de su entorno han aumentado su temperatura). El trabajo realizado por el cuerpo contra el rozamiento se ha hecho a costa de su energía mecánica; o sea, este trabajo ha transferido parte de la energía mecánica del cuerpo al propio cuerpo en forma de energía térmica. Después ese exceso de energía térmica se transfiere al entorno que rodea al cuerpo en forma de *calor*, gracias a la diferencia de temperatura entre ellos. Este ejemplo no es más que un caso particular de un principio mucho más general que recibe el nombre de ***conservación de la energía*** y que se puede enunciar así:

La energía no se puede crear ni destruir, sólo puede transformarse de unas formas a otras y transferirse de unos cuerpos a otros. Una consecuencia de ello es que la energía del Universo permanece constante.

Las fuerzas no conservativas que, como la de rozamiento, hacen disminuir siempre la energía mecánica del sistema sobre el que actúan reciben el nombre de ***fuerzas disipativas***.

6. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

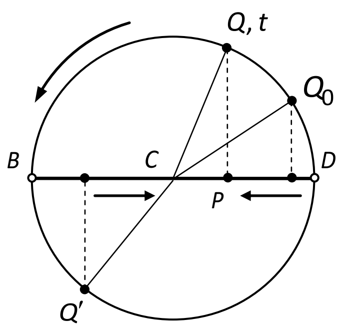
6.1. Introducción

Una partícula tiene un movimiento ***oscilatorio*** o ***vibratorio*** *cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio*[40], que recibe el nombre de ***centro de oscilación***.

El movimiento de un péndulo y el de una masa sometida a la fuerza de un muelle estirado son ejemplos de movimientos oscilatorios. Los átomos en un sólido y en una molécula vibran unos respecto a otros y los electrones en una antena emisora o receptora oscilan rápidamente. Entender el movimiento vibratorio es esencial para el estudio de los fenómenos ondulatorios relacionados con el sonido y la luz.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el ***movimiento armónico simple*** (**MAS**). Además de ser el más sencillo de analizar, constituye una descripción bastante precisa de muchas oscilaciones que se observan en la Naturaleza. Sin embargo, *no todos los movimientos oscilatorios son armónicos*.

6.2. Cinemática del MAS

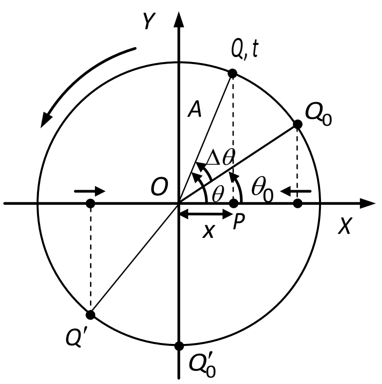


Sea una partícula que describe un *movimiento circular uniforme* en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, como indica la figura. Supongamos que se encuentra en el punto Q_0 en el instante inicial ($t_0 = 0$), en el punto Q en el instante t y en el punto Q' en el instante t'.

La proyección de la partícula sobre el diámetro BD es el punto P. En la figura se ve que, conforme la partícula se mueve por la circunferencia, la proyección P ejecuta un movimiento de oscilación alrededor de C entre los puntos B y D.

La proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro de la circunferencia ejecuta un movimiento de oscilación respecto al centro de la misma, que recibe el nombre de ***movimiento armónico simple****, abreviadamente* ***MAS****.*

6.2.1. Ecuaciones del MAS



Consideremos un sistema de coordenadas tal que su eje OX tenga la dirección del diámetro BD y su origen (O) coincida con el centro de la circunferencia (C), como se ve en la figura. En el instante t, cuando la partícula está en el punto Q, el ángulo que el radio $R = \overline{OQ}$ forma con OX es θ, por lo que la distancia $x = \overline{OP}$ (con signo positivo o negativo, según a qué lado de O se encuentre el punto P), que determina la posición de P respecto a O, es igual a,

$$x = A\cos\theta$$

El desplazamiento angular de la partícula en el intervalo $\Delta t = t - t_0$ (pues $t_0 = 0$) es $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, por lo que, si su velocidad angular es ω, al aplicar la ecuación del movimiento circular uniforme, tenemos,

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \omega t \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

que sustituyendo en la ecuación anterior da,

---

[40]Recibe este nombre porque, como se verá más adelante, la fuerza que actúa sobre la partícula tiende a llevarla siempre a esta posición.

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \theta_0)}$$

que *es la ecuación del MAS expresada en función del coseno*. Recordando que $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, se puede expresar como,

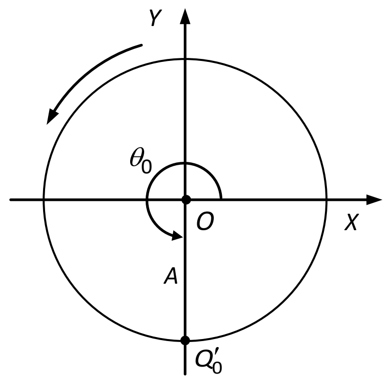
$$x = A\sin(\omega t + \theta_0 + \pi/2)$$

y haciendo $\varphi = \theta_0 + \pi/2$, queda finalmente que,

$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \varphi)}$$ [41]

que *es la ecuación del MAS expresada en función del seno*. Es la forma más habitual de encontrarla

La cantidad *x*, que representa la posición de *P* respecto a *O* (siempre que *O* y *P* coincidan), se denomina ***elongación***. A ($\omega t + \varphi$) se le conoce como ***ángulo de fase*** o simplemente ***fase*** y φ es la ***fase inicial***; es decir, la fase en el instante $t = t_0 = 0$ que, como veremos más adelante, determina la posición de la partícula en el instante t_0. Ya que la función *seno* oscila entre -1 y +1, el desplazamiento de la partícula varía desde $x = -A$ hasta $x = A$. La separación máxima de la partícula a partir del origen (*A*) es la ***amplitud*** del movimiento y ω es una constante característica de cada MAS denominada ***pulsación*** o ***frecuencia angular***.



Si empezamos a contar el tiempo cuando la partícula con movimiento circular se encuentra en el punto Q'_0; o sea, cuando el punto *P* que describe el MAS está en el origen *O* y moviéndose en el sentido positivo del eje *OX* (ver figura),

$$\theta_0 = 3\pi/2 \Rightarrow x = A\cos(\omega t + 3\pi/2)$$

pero recordando que $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, queda que,

$$x = A\sin\left[(\omega t + 3\pi/2) + \pi/2\right] = A\sin(\omega t + 2\pi) \Rightarrow$$

$$\boxed{x = A\sin\omega t}$$

que *es* la *ecuación del MAS de una partícula que, cuando empezamos a contar el tiempo, se encuentra en el punto x = 0 y moviéndose en el sentido positivo del eje*.

La velocidad (*v*) del punto *P*, que describe un MAS a largo del eje *OX*, es la derivada de la posición respecto al tiempo; por lo tanto cuando el centro de oscilación coincide con el origen de coordenadas, tenemos que,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\sin(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow \boxed{v = \omega A\cos(\omega t + \varphi)}$$

que *varía periódicamente entre los valores* $-\omega A$ (mínimo) y $+\omega A$ (máximo). Usando la relación,

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$$

podemos expresar la velocidad en función de la posición (*x*). En efecto,

$$v = \omega A\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi)} = \omega\sqrt{A^2 - A^2\sin^2(\omega t + \varphi)}$$

y teniendo en cuenta que $x = A\sin\omega t$, queda que,

[41] Notemos que la cantidad *OP* expresa **siempre** el desplazamiento de *P* respecto al centro de oscilación *C* y también su posición respecto a *O* si *C* y *O* coinciden. En el caso de que el origen de coordenadas *O* no coincida con *C*, $x \neq OP$ y, por lo tanto, *x* ya no da la posición de *P* respecto a *O*. En este caso la ecuación se escribe como $\Delta x = A\sin(\omega t + \varphi)$, con $\Delta x = x - x_0 = OP$ y donde x_0 representa la posición de *C* respecto a *O*.

$$\boxed{v=\omega\sqrt{A^2-x^2}}$$

Análogamente, la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo; por lo tanto,

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\omega A\cos(\omega t+\varphi)\right] \Rightarrow \boxed{a=-\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi)}$$

Como $x=A\sin\omega t$, podemos expresar la aceleración en función de la posición (x),

$$\boxed{a=-\omega^2 x}$$

que *varía periódicamente entre los valores* $-\omega^2 A$ (mínimo) y $+\omega^2 A$ (máximo). Observa que la ecuación expresa que *en el MAS la aceleración es proporcional y de sentido opuesto a la elongación. Esto es, cuando la aceleración es positiva la elongación es negativa y viceversa.*

6.2.2. Periodicidad del movimiento

Un movimiento es ***periódico*** cuando repite simultáneamente su posición, velocidad y aceleración cada cierto intervalo de tiempo, denominado ***periodo** (T)*.

Las funciones *seno* y *coseno* son periódicas puesto que se repiten cada vez que el ángulo varía en 2π radianes; esto es así porque,

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2n\pi) \;\text{ y }\; \cos\alpha=\cos(\alpha+2n\pi) \;\text{ con }\; n\in\mathbb{Z}$$

Las ecuaciones de la elongación y la aceleración son funciones de $\sin\omega t$ y la ecuación de la velocidad es función de $\cos\omega t$; por lo tanto, *las tres* se repiten cada vez que ωt se incrementa en 2π radianes, lo que significa que *el MAS es un movimiento periódico*

Puesto que el término ω de la ecuación del MAS es constante, el periodo del movimiento (T) tiene que cumplir que,

$$2\pi=\omega T \Rightarrow T=2\pi/\omega$$

Recuerda que, la frecuencia (f) de un movimiento periódico es el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo, o sea,

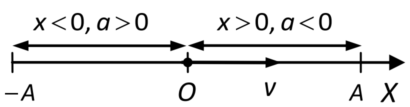
$$f=1/T$$

y se mide en el SI en ciclos/segundo, unidad que recibe el nombre de ***Hertzio** (Hz)*. De las ecuaciones anteriores se deduce que la relación entre la frecuencia angular y la frecuencia es,

$$\boxed{\omega=2\pi f}$$

6.2.3. Representaciones gráficas

Las representaciones gráficas de la elongación, velocidad y aceleración que vamos a ver a continuación muestran el carácter periódico del MAS.

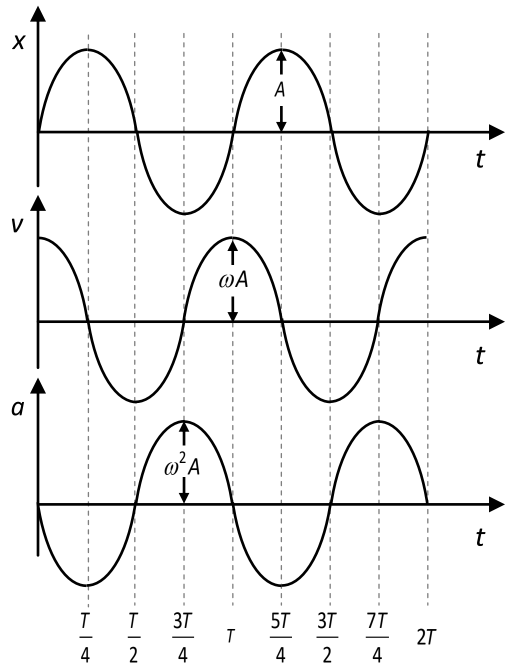


Sea una partícula animada con un *MAS* a lo largo del eje *OX* de un sistema de coordenadas, oscilando entre los puntos $x=-A$ y $x=A$. Supongamos que al empezar a contar el tiempo ($t_0=0$) está en la posición ($x_0=0$) y moviéndose hacia la derecha (v > 0) como ilustra la figura. Hemos visto en el punto 2.1 que en este caso la fase inicial es cero, por lo que la ecuación es,

$$x=A\sin\omega t$$

así, las ecuaciones de la velocidad y aceleración toman la forma,

$$v = \omega A \cos \omega t \quad \text{y} \quad a = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$



En la figura se han representado la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo en el caso particular que estamos considerando y se han indicado los valores de las magnitudes a intervalos de tiempo de un cuarto de periodo. Se ve cómo los valores de las tres magnitudes se repiten cuando transcurre un periodo.

Las gráficas x y a reflejan que estas magnitudes alcanzan sus valores nulos al mismo tiempo y que en los instantes en los que x es máxima, a es mínima y viceversa; se dice que se encuentran en ***oposición de fase***. El nombre es porque si comparamos las ecuaciones de x y a, tenemos,

$$x = A \sin \omega t \quad \text{y} \quad a = -\omega^2 x$$

$$\left.\begin{array}{r} a = -\omega^2 A \sin \omega t \\ -\sin \omega t = \sin(\omega t + \pi) \end{array}\right\} \Rightarrow a = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$$

esto es, que *la diferencia de sus ángulos de fase es de π radianes*.

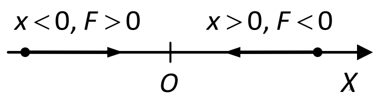
Las gráficas de x y v indican que cuando una de ellas es máxima o mínima, la otra es nula y viceversa. Comparando sus ecuaciones,

$$x = A \sin \omega t$$

$$\left.\begin{array}{r} v = \omega A \cos \omega t \\ \cos \omega t = \sin(\omega t + \pi/2) \end{array}\right\} \Rightarrow v = \omega A \sin(\omega t + \pi/2)$$

vemos que la diferencia de fase entre ambas es de $\pi/2$ radianes. Como el término $\pi/2$ aparece con signo positivo, se dice que v está *adelantada* $\pi/2$ rad respecto a x. Por la misma razón, decimos que a adelanta a x en π radianes.

6.3. Dinámica del MAS: fuerza lineal de restitución. Aplicación al sistema masa-muelle. Ley de Hooke



El MAS es un movimiento acelerado cuando la partícula se dirige al centro de oscilación y decelerado cuando se aleja de él. Esto significa que *la fuerza que origina el movimiento apunta siempre al centro de oscilación* (es decir, que tiende a llevar a la partícula a su posición de equilibrio), como ilustra la figura; por esta razón recibe el nombre de ***fuerza restauradora***.

Aplicando la definición de fuerza central (se vio en el tema 1) concluimos que *la fuerza restauradora es central y de atracción, y el centro de fuerzas es el punto O*; es decir, *el centro de oscilación.*

Los objetivos fundamentales de este punto son averiguar cuál es esta fuerza y, si es periódica, hallar su frecuencia y periodo de oscilación.

6.3.1. Definición de fuerza elástica. Ley de Hooke

La fuerza que ejerce un cuerpo elástico deformado sobre una masa m se denomina ***fuerza elástica***. Consideremos una partícula sometida a la fuerza elástica de un muelle, de modo que ésta actúa a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas y la partícula se encuentra en el origen de coordenadas O cuando el muelle está en su estado natural (o sea, sin ejercer fuerza alguna), como se ilustra en la

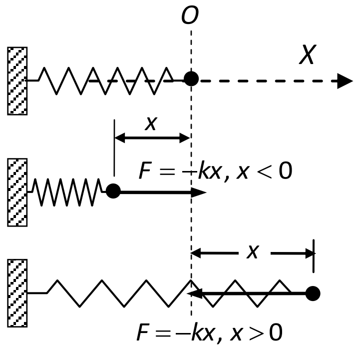


figura superior.

La ley de Hooke establece que *la fuerza elástica es proporcional y de sentido contrario a la deformación del cuerpo que la ejerce*.

La expresión matemática de la ley en el caso ilustrado en la figura es,

$$\boxed{F=-kx}\ ^{(42)}$$

donde *x* es la cantidad que el muelle se deforma, con signo positivo si se alarga y con negativo si se encoge, y *k* es una constante de proporcionalidad que se conoce como ***constante elástica***; su unidad en el SI es el *N/m* y expresa la fuerza necesaria para desplazar la partícula una distancia unidad[43]. El signo menos se debe a que *F* tiene sentido opuesto al desplazamiento; pues $F>0$ cuando el muelle se encoge, $x<0$, (figura central) y $F<0$ cuando se alarga, $x>0$, (figura inferior).

Aunque la ecuación *F* = –*kx* es vectorial, se puede expresar en su forma escalar porque su dirección es siempre la del eje *OX*. El valor absoluto de *F* expresa la intensidad de la fuerza y el signo indica el sentido.

6.3.2. Aplicación de la 2ª ley de Newton a la fuerza elástica. Deducción del tipo de movimiento y de la frecuencia y periodo de oscilación

Aplicando la segunda ley de Newton a la fuerza elástica,

$$\left.\begin{array}{r}F=-kx\\F=ma\end{array}\right\}\Rightarrow\ -kx=ma\ \Rightarrow\ a=-\frac{k}{m}x$$

donde –*k*/*m* es una constante del movimiento que sólo depende del muelle y de la masa de la partícula. Haciendo,

$$\omega=\sqrt{k/m}\ \Rightarrow\ \omega^2=k/m$$

queda que, $a=-\omega^2x$ donde $\omega^2=cte$

que es la ecuación de la aceleración del *MAS*.

Por lo tanto, concluimos que *el movimiento armónico simple lo origina la fuerza elástica*. Como el *MAS* es un movimiento periódico, *la fuerza elástica es periódica*.

Como el periodo de un *MAS* es $T = 2\pi/\omega$, tenemos que,

$$\left.\begin{array}{r}\omega^2=k/m\\T=2\pi/\omega\Rightarrow\omega^2=4\pi^2/T^2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{k}{m}\ \Rightarrow\ \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

y finalmente, como la frecuencia de un *MAS* viene dada por $f = 1/T$, llegamos a,

$$\boxed{f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Las ecuaciones expresan *T* y *f* en función de *k* y *m* y prueban que, para un muelle de constante elástica *k* dada, *el periodo y la frecuencia de oscilación dependen de*

[42]Notemos que esta expresión es válida sólo si el cuerpo está en el origen *O* cuando el muelle se encuentra en su estado natural (ni encogido ni estirado). En este caso el alargamiento del muelle coincide con la distancia del cuerpo al origen *O*, esto es, con *x*. En cualquier otro caso el alargamiento del muelle, que es igual al desplazamiento del cuerpo, es $\Delta x=x-x_0$, donde x_0 es la posición del cuerpo cuando el muelle se encuentra en su posición natural. En consecuencia, la fuerza vendría dada ahora por la expresión $F=-k\Delta x$.

[43]Basta hacer *x* = 1 para comprobar que es así.

la masa de la partícula que realiza el MAS, pero no de la longitud del resorte ni de la amplitud de las oscilaciones.

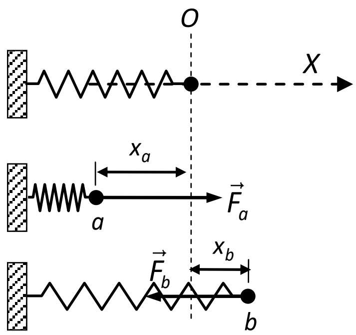
6.4. Energía del oscilador armónico

Una partícula animada con un *MAS* recibe el nombre de ***oscilador mecánico***. Se llama así porque posee energía mecánica (cinética y potencial).

El objetivo de este punto es encontrar una ecuación que exprese la energía mecánica del oscilador en función de la amplitud y de la frecuencia de la oscilación.

6.4.1. Energía potencial elástica

La fuerza elástica es central y su intensidad, de acuerdo con $F=-kx$, depende sólo de la distancia al centro de oscilación (o sea, al centro de fuerzas). Vimos en el punto 5.5.2 que este tipo de fuerzas son conservativas; es decir, que el trabajo que realizan no depende de la trayectoria seguida. Por lo tanto, *la fuerza elástica es conservativa*.



A toda partícula sometida a una fuerza conservativa se le puede asociar una energía potencial, que en el caso de la fuerza elástica recibe el nombre **de *energía potencial elástica***. Para deducir su ecuación consideremos de nuevo una partícula sometida a la fuerza elástica de un muelle, de modo que ésta actúa a lo largo del eje *OX* de un sistema de coordenadas y la partícula se encuentra en el origen *O* cuando el muelle está en su estado natural (o sea, sin ejercer fuerza alguna), como se ve en la figura superior.

Calculemos el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve desde el punto *a* al punto *b*. Ya que la fuerza y el movimiento tienen la dirección del eje *OX* del sistema de coordenadas, podemos aplicar la expresión del trabajo de una fuerza variable en el caso unidimensional que vimos en el punto 5.5.2; entonces, cuando la partícula se mueve desde *a* hasta *b* tenemos que,

$$W_a^b=\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b -kx\,dx=\left[-½kx^2\right]_a^b=-½kx_b^2-\left(-½kx_a^2\right)=½k\,x_a^2-½k\,x_b^2$$

Comparando el resultado con la ecuación $W=E_p(a)-E_p(b)$, que relaciona el trabajo de una fuerza conservativa con la energía potencial, deducimos que la diferencia de energía potencial elástica de una partícula cuando se mueve entre los puntos *a* y *b* es,

$$E_p(a)-E_p(b)=½k\,x_a^2-½k\,x_b^2$$

Recuerda que la energía potencial en un punto particular no está definida. La razón es que, como ya sabemos, si sumamos una constante arbitraria *C* a los dos términos del segundo miembro de la ecuación anterior, se obtiene el mismo resultado[44]. Así que la energía potencial elástica de la partícula en un punto arbitrario *x* es,

$$E_p(x)=½k\,x^2+C \quad \text{con } C \text{ arbitraria}$$

En el caso particular de que el cuerpo elástico se encuentre en su posición natural $(x=0)$. tenemos que,

[44]Repasa el punto 5.5.1.

$$E_p(0) = C$$

entonces, si convenimos en hacer $C = 0$, tenemos que $E_p(0) = 0$ cuando la partícula está en su posición de equilibrio; lo que permite tomar esta posición como referencia para medir la energía potencial en cualquier otra posición. Entonces,

$$\boxed{E_p(x) = ½\, k\, x^2}$$

por lo que *la energía potencial tiene un valor mínimo (cero) en el centro oscilación* $(x = 0)$ *y aumenta a medida que la partícula se acerca a cualquiera de los extremos* $(x = \pm A)$, *siendo máxima en ellos.*

Observa que el valor absoluto de x coincide con la variación de la longitud del cuerpo elástico (ΔL), por lo que la energía potencial elástica se puede expresar de una forma más general (independiente del sistema de coordenadas) como,

$$\boxed{E_p(\Delta L) = ½\, k\, \Delta L^2} \quad \text{pues} \quad |x| = \Delta L$$

6.4.2. Energía cinética

La energía cinética de una partícula de masa m y velocidad v es,

$$E_c = ½\, m v^2$$

pero en el punto 6.2.1 hemos visto que en el *MAS* la velocidad viene dada por,

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

que se reduce a $v = \omega A \cos \omega t$ si $\varphi = 0$, como se ha visto en el punto 6.2.3. Combinando la ecuación de la energía cinética con la de la velocidad llegamos a,

$$E_c = ½\, m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t$$

Si tenemos en cuenta que,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \;\Rightarrow\; \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

y sustituimos en la ecuación anterior, llegamos a,

$$E_c = ½\, m\omega^2 A^2 (1 - \sin^2 \omega t) = ½\, m\omega^2 (A^2 - A^2 \sin^2 \omega t)$$

Pero en el punto 6.3.2 hemos obtenido que $\omega^2 = k/m \Rightarrow k = m\omega^2$ y sabemos que $x = A \sin \omega t$; así que la energía cinética puede expresarse también en función de la posición y de la constante k como,

$$\boxed{E_c = ½\, k\left(A^2 - x^2\right)}$$

de donde se deduce que *la energía cinética tiene un valor máximo en el centro de oscilación* $(x = 0)$ *y disminuye a medida que la partícula se acerca a cualquiera de los extremos* $(x = \pm A)$, *siendo nula en ellos.*

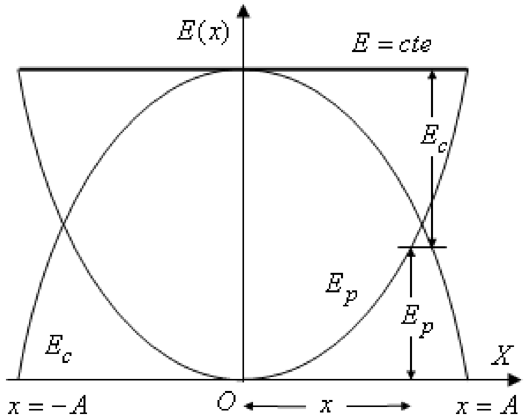
6.4.3. Energía mecánica

El teorema de conservación de la energía mecánica afirma que *la energía mecánica de una partícula sometida sólo a fuerzas conservativas es constante.* Como la energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial, tenemos que,

$$E_m = E_c + E_p = ½\, m v^2 + ½\, k x^2 = ½\, k(A^2 - x^2) + ½\, k x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{E_m = ½\, k A^2}$$

que *permanece constante para un movimiento dado*, porque K y A son ctes. La figura de la página siguiente ilustra cómo varían las energías cinética y potencial durante una oscilación completa entre los puntos $x = A$ y $x = -A$. Las curvas que representan a las energías cinética y potencial son parábolas.



La energía también se puede expresar en función de la frecuencia del oscilador. En efecto, en el punto 6.3.2 vimos que la frecuencia del oscilador viene dada por,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{k}{m} \Rightarrow k = 4\pi^2 m f^2$$

Combinando este resultado con el de la energía mecánica, se tiene,

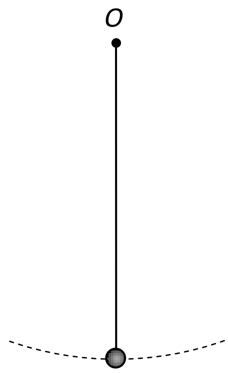
$$\boxed{E_m = 2\pi^2 m f^2 A^2}$$

que expresa que *la energía mecánica del oscilador armónico es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia de oscilación y al de la amplitud del movimiento*. Este resultado es muy importante en el estudio de las ondas armónicas, como tendremos ocasión de comprobar.

En el *MAS* la amplitud es constante, al igual que la energía del oscilador. Sin embargo, sabemos que la amplitud de un cuerpo real en vibración, como un resorte o un péndulo, disminuye gradualmente, lo que indica una pérdida paulatina de energía por parte del mismo; se dice que el movimiento oscilatorio está ***amortiguado***. Las fuerzas de fricción son las responsables de la amortiguación y, normalmente, surgen de la resistencia del aire y de las fuerzas internas.

6.5. El péndulo simple

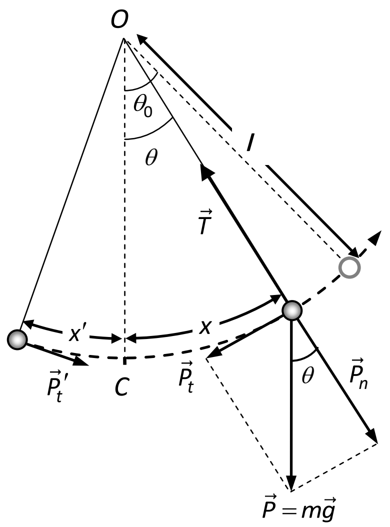
Un ***péndulo simple*** se define como *una partícula de masa m (denominada **lenteja**) suspendida de un punto O fijo mediante un hilo de longitud l y sin masa* (ver figura). Es fácil comprobar que el movimiento de un péndulo es oscilatorio; es decir, que se mueve periódicamente en torno a una posición de equilibrio, que es la posición más baja del mismo.



El péndulo simple es ideal; sin embargo, si sustituimos la partícula por una esfera y la masa del hilo es despreciable frente a la de la esfera, se obtiene una buena aproximación. La importancia del péndulo simple es que, cuando ejecuta pequeñas oscilaciones, *su movimiento se aproxima al de un MAS*.

La figura de la página siguiente muestra un péndulo que se ha separado un ángulo θ_0 de su posición de equilibrio. Al dejarlo en libertad, se pone a oscilar en torno a la posición de equilibrio C. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la tensión de cuerda. Si descomponemos el peso en sus componentes tangencial (P_t) y normal (P_n), vemos que la componente tangencial es la única responsable del movimiento de oscilación.

Como sucede en el movimiento en un eje coordenado, para fijar la posición de la partícula a lo largo de la trayectoria es necesario orientarla en un sentido y fijar un punto de referencia. La orientación de la trayectoria es la indicada por la punta de flecha de la figura y el punto de referencia el C (o sea, la posición de equilibrio). Así, la posición de la partícula (x) quedará determinada por su distancia al punto C con signo + ó –, según esté a la derecha o a la izquierda de C. La componente tangencial del peso (P_t) será positiva si apunta en el sentido de la punta de flecha y negativa en caso contrario. Observa que la posición de la partícula (x) coincide con su desplazamiento desde la posición de equilibrio C.



La fuerza (F) responsable del movimiento es la componente tangencial del peso;

$$F = P_t = -mg\sin\theta$$

donde signo menos se debe a que F tiene sentido opuesto al desplazamiento; de modo que, cuando x es positivo, F es negativa y viceversa.

Observa que si la partícula está a la derecha de C se cumple que $x>0$ y $\theta>0$; mientras que si está a la izquierda de C ocurre al revés; o sea $x<0$ y $\theta<0$.

El movimiento no es armónico simple porque la fuerza F, aunque tiene sentido opuesto al desplazamiento, es proporcional a $\sin\theta$ pero no al desplazamiento (x), como ocurre con la fuerza elástica. Sin embargo, para pequeñas oscilaciones se cumple (si el ángulo se mide en radianes) que $\theta \approx \sin\theta$; es decir, el ángulo se confunde con su seno. Por lo tanto, en este caso, la fuerza es,

$$F = -mg\theta$$

Ahora bien, la figura muestra que el desplazamiento de la partícula es x cuando el ángulo formado por el hilo y la vertical es θ; por lo tanto, si el ángulo se mide en radianes, se cumple que,

$$x = l\theta \;\Rightarrow\; \theta = x/l$$

donde l es la longitud del hilo. Insertando este resultado en la ecuación anterior,

$$F = -mgx/l = -\left(mg/l\right)x$$

y haciendo $k = mg/l$, llegamos a, $\quad F = -kx$

que es *la ecuación de la fuerza causante del MAS*. Así, queda probado que el movimiento de un péndulo simple es, para pequeñas oscilaciones, armónico simple.

La aceleración de una partícula de masa m animada con un *MAS* de frecuencia angular ω es: $a = -\omega^2 x$. Por lo tanto,

$$\left.\begin{array}{r} F = -kx \\ F = ma = m(-\omega^2 x) \end{array}\right\} \Rightarrow -kx = m(-\omega^2 x) \Rightarrow k = m\omega^2$$

así que, $$\left.\begin{array}{r} k = mg/l \\ k = m\omega^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}}$$

y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ donde T y f son, respectivamente, el periodo y la frecuencia del movimiento, obtenemos que,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \quad \text{y} \quad \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

en donde se ve que *el periodo y la frecuencia del péndulo, para ángulos pequeños, son independientes de la amplitud del movimiento y de la masa de la partícula.*