PROBLEMAS RESUELTOS DE INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Un rotor de 100 espiras gira dentro de un campo magnético constante de 0,1 *T* con una velocidad angular de 50π *rad/s*. Sabiendo que la superficie de cada espira tiene un área de 0,4 *m*^{2} y que en el instante *t* = 0 el vector $\vec{S}$ forma un ángulo de –60º con $\vec{B}$, se pide:

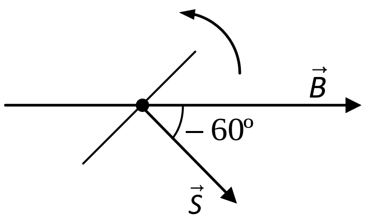
a) Fuerza electromotriz instantánea y máxima inducida en la espira.

b) Periodo y frecuencia de la corriente.

c) Representación gráfica de la fem.

d) Intensidad instantánea cuando se conecta una resistencia de 60 Ω.

Solución



El flujo a través de cada espira del rotor es $\Phi = BS\cos(\omega t + \varphi)$ y la fem inducida en las 100 espiras del rotor viene dada por,

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = +N\omega BS\sin(\omega t + \varphi) = 100\times 50\pi\times 0{,}1\times 0{,}4\sin(50\pi t - \pi/6)\ V$$

El valor máximo de ε se da cuando $\text{sen}(\omega t + \varphi) = 1$; es decir,

$$\boldsymbol{\varepsilon_{max}} = \varepsilon_0 = N\omega BS = 100\times 50\pi\times 0{,}1\times 0{,}4 = \mathbf{628}\ \boldsymbol{V}$$

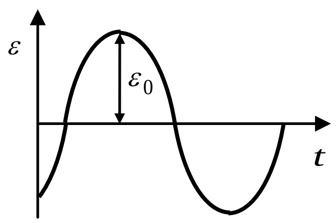
Como $\varphi = -60º = -\pi/3\ rad$, el valor de la fem en cada instante es,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{628\sin(50\pi t - \pi/3)}\ \boldsymbol{V}$$

El periodo de la corriente; o sea, el tiempo que le lleva al rotor dar una vuelta completa es,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50\pi} = \mathbf{0{,}04}\ \boldsymbol{s}$$ (ya que se trata de un M.C.U.)

y la frecuencia es $\boldsymbol{f} = 1/T = 1/0{,}04 = \mathbf{25}\ \boldsymbol{Hz}$



Teniendo en cuenta que en el instante *t* = 0 el valor de la *fem* es,

$$\varepsilon = 628\,\text{sen}(-\pi/3) = -544\ V$$

y que al aumentar *t* también aumenta $\sin(\omega t + \varphi)$, la representación gráfica *fem*/*t* es la de la figura adjunta.

Si el generador es ideal (sin resistencia interna) la aplicación de la ley de Ohm al circuito da

$$\boldsymbol{i} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{628}{60}\sin(50\pi t - \pi/3) = \mathbf{10{,}5\sin(50\pi t - \pi/3)}\ \boldsymbol{A}$$

donde 10,5 *A* es el valor máximo de *i*; esto es, I_0 = 10,5 *A*.

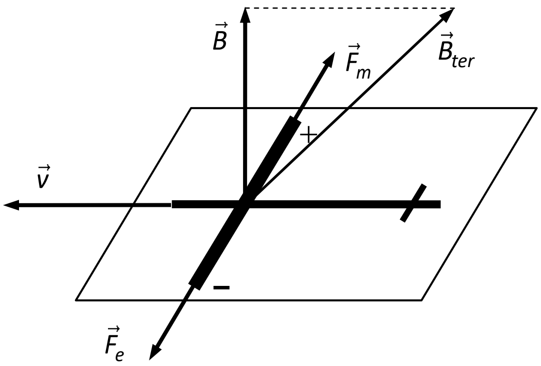
Responde:

a) **¿Qué diferencia de potencial eléctrico se crea entre los extremos del ala de un avión que vuela horizontalmente a una velocidad de 900 *km/h* en un lugar donde la componente vertical del campo magnético terrestre es de $2\cdot10^{-5}$ *T*?**

b) **Representa gráficamente el sistema, con el campo magnético y la fuerza que actúa sobre las cargas eléctricas libres.**

Dato: Distancia entre los extremos de las alas, *d = 45 m*.

Solución



Las cargas libres del ala metálica del avión se mueven en el interior del campo magnético terrestre. Por lo tanto, éste ejerce una fuerza sobre dichas cargas a lo largo del ala que hace que se acumule una carga positiva en un extremo del ala y negativa en el otro, tal como se ve en la figura (recuerda que la fuerza es la misma para las cargas positivas y negativas, pero de sentido opuesto). Esto crea en el interior del ala un campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre las mismas cargas, pero en sentido opuesto (ver figura). Cuando se alcanza el equilibrio tenemos,

$$\left.\begin{array}{r}\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow F_m = |q|vB\sin 90\\ \vec{F}_e = q\vec{E} \Rightarrow F_e = |q|E\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{q}vB = \cancel{q}E \;\Rightarrow\; E = vB = 250\frac{m}{s}\times 2\cdot10^{-5}\,T = 5{,}00\cdot10^{-3}\;\frac{N}{C}$$

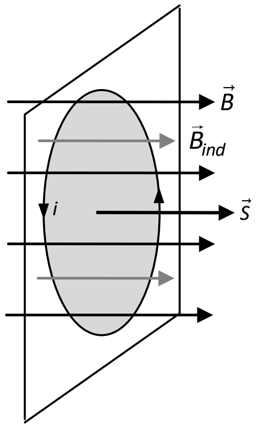
Como la *ddp* entre los extremos de un conductor en el que existe un campo eléctrico viene dada por $\Delta V = EL,$ donde *L* es la longitud del conductor,

$$\boldsymbol{\Delta V} = EL = Ed = 5\cdot10^{-3}\,N/C\times 45m = \mathbf{0{,}225\ V}$$

Aunque no se ha demostrado, la diferencia de potencial entre los extremos de un conductor en el que existe un campo eléctrico E viene es ΔV = E·L, donde L es la longitud del conductor.

Una bobina tiene una superficie de 0,002 m^2 y está colocada perpendicularmente a un campo magnético de 2 *T*. Si en 0,01 *s* la inducción se reduce a 0,5 *T*, ¿cuál es la *fem* inducida sabiendo que la bobina tiene 200 espiras?

Solución



Como la bobina está colocada perpendicularmente al campo magnético se cumple que,

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos 0 = BS \;\Rightarrow\; \begin{cases}\Phi_{fin} = B_{fin}S = 0{,}5T\times0{,}002m^2 = 10^{-3}\,Wb\\ \Phi_{in} = B_{in}S = 2\,T\times0{,}002m^2 = 4\cdot10^{-3}\,Wb\end{cases}$$

Suponemos que la variación del flujo magnético es proporcional al tiempo, así que,

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{\left(\Phi_{fin}-\Phi_{in}\right)}{\Delta t} = -200\frac{\left(10^{-3}-4\cdot10^{-3}\right)}{0{,}01} = 200\frac{3\cdot10^{-3}}{0{,}01} = \mathbf{60\ V}$$

Como el flujo del campo $\vec{B}$ (que crea la *fem* inducida) disminuye, la *i* inducida crea un campo magnético $\vec{B}_{ind}$ que se opone a la disminución de $\vec{B}.$ Por ello $\vec{B}_{ind}$ ha de tener el mismo sentido que $\vec{B},$ lo que implica que el sentido de *i* es el indicado en la figura.

Un alambre de 1 m de longitud desliza sin rozamiento por dos guías metálicas paralelas (ver figura 1) en el interior de un campo magnético de 1 *T*. Si la velocidad de desplazamiento del alambre es de 1 *m/s* y el campo magnético perpendicular al mismo, determina:

a) La diferencia de potencial eléctrico entre los extremos del alambre.

b) La intensidad que circulará por el alambre si se "cierra" el circuito con una resistencia de 1 Ω. (Se considera que la resistencia del alambre y de las guías es despreciable)

c) La fuerza electromotriz inducida y su sentido.

d) La potencia disipada en la resistencia.

e) La fuerza que se debe ejercer sobre la espira para mantener la velocidad constante antes y después de cerrar el circuito.

f) La potencia suministrada al circuito por el agente que ejerce la fuerza sobre el alambre.

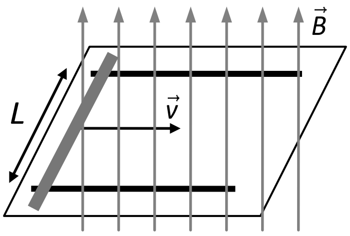
Solución

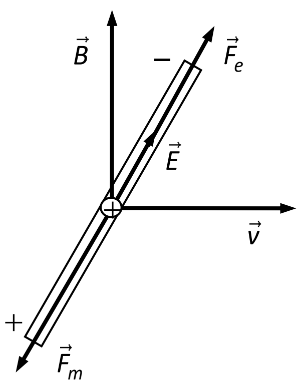
Apartado a)

Recuerda que estamos usando el sentido convencional de la corriente (suponemos que son las cargas + las que se mueven en el interior del conductor).

Como el conductor se mueve en el interior de un campo magnético, las cargas libres del mismo están sometidas a una fuerza magnética dada por la ley de Lorentz,

$$\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$$





La dirección y el sentido de $\vec{F}_m$ se determinan por la regla de la mano derecha (ver figura inferior). Esto hace que en un extremo del conductor se acumule la carga positiva y en el otro la negativa.

Como consecuencia de ello aparece una diferencia de potencial (*ddp*) en los extremos del conductor y, por lo tanto, un campo eléctrico ($\vec{E}$) en su interior que ejerce una fuerza eléctrica (F_e) sobre las cargas. Ya que $V_+ > V_-$, que $\vec{E}$ apunta en el sentido de los potenciales decrecientes y que $\vec{F}_e = q\vec{E}$, tenemos que la $\vec{F}_e$ que actúa sobre las cargas positivas tiene el sentido indicado en la figura; es decir, opuesta a $\vec{F}_m$; (es decir, oponiéndose al movimiento de las cargas +).

Observa que $\vec{F}_m = cte$ porque $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son constantes, y que en los instantes iniciales $\vec{F}_e$ es pequeña porque la acumulación de cargas es despreciable. Sin embargo, a medida que pasa el tiempo se acumulan más cargas de distinto signo en los extremos del conductor, por lo que $\vec{F}_e$ va aumentando. Llega un momento en el que se cumple que $F_e = F_m$, alcanzándose una situación de equilibrio; o sea, la fuerza neta que actúa sobre las cargas es nula (su movimiento se detiene) y, por lo tanto la *ddp* en los extremos del conductor ($V_+ - V_- = \Delta V$) permanece constante. Queremos hallar el valor de ΔV.

Nota: el campo eléctrico creado en el interior de un conductor es constante en el espacio; lo que significa que su valor es el mismo en todos los puntos del mismo. Esto es importante porque podemos usar la ecuación de los campos eléctricos constantes: $E = \Delta V/d$.

Como,

$$\left.\begin{array}{r} F_e = |q|E \text{ y } F_e = F_m \\ F_m = |q|vB\,\text{sen}90 \end{array}\right\} \Rightarrow E = vB\sin 90 \Rightarrow E = vB = 1m/s\times 1T = 1N/C$$

Por lo tanto, la *ddp* entre los extremos del conductor, que es **constante**, viene dada por,

$$\left.\begin{array}{r} E=\Delta V/d \\ d=L \end{array}\right\} \Rightarrow \ \Delta V=EL=1N/C\times 1m \ \Rightarrow \ \mathbf{\Delta V=1\,V}$$

Apartado b)

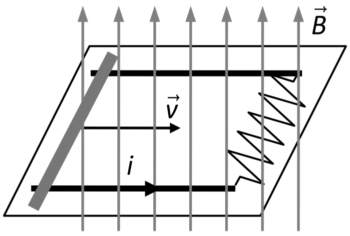
Sea un circuito básico que consta de un generador y una resistencia conectados. Al aplicar las leyes de Ohm generalizada (al circuito) y normal (a los extremos de *R*), llegamos a,

$$\left.\begin{array}{l} i=\varepsilon/(R+r) \ \Rightarrow \ \varepsilon=iR+ir \\ i=\Delta V/R \ \Rightarrow \ \Delta V=iR \end{array}\right\} \Rightarrow \ \varepsilon=\Delta V+ir \ \ (1)$$

Observa que si $i=0$ (circuito abierto; o sea, si el generador está desconectado del circuito), se cumple al aplicar la ecuación (1) que,

$$\varepsilon=\Delta V$$

es decir; **en un circuito abierto la *fem* del generador coincide numéricamente con la *ddp* en los extremos del mismo), que es un resultado totalmente general.**



El conductor moviéndose en el interior del campo magnético es un generador que da una *ddp* de 1 *V* cuando no está conectado a nada; por lo tanto se cumple que su *fem* (ε) es,

$$\varepsilon=\Delta V=1V$$

Al cerrar el circuito con una resistencia *R*, tenemos al aplicar la ley de Ohm generalizada al circuito que,

$$i=\varepsilon/(R+r)$$

que muestra que necesitamos conocer *r* (la resistencia interna del conductor, que es el generador, para hallar *i*).

En este tipo de problemas si no nos dan *r* es porque es despreciable frente a *R*, así que, haciendo $r=0$ y aplicando la ley de Ohm generalizada, tenemos que,

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon=\Delta V \\ i=\varepsilon/R \end{array}\right\} \Rightarrow \ i=\frac{\Delta V}{R}=\frac{1V}{1\Omega} \ \Rightarrow \ \mathbf{i=1\,A}$$

Nota que si aplicamos la ley de Ohm normal a los extremos de *R*,

$$i=\Delta V/R=1V/1\Omega=1A$$

sale lo mismo de una forma más sencilla. El resultado es correcto pero **no es válido si *r* no es despreciable**, porque en este caso la *ddp* en los extremos de *R* ya no es de 1 *V*.

En efecto, supongamos que $r=0{,}2\Omega$. Se sigue cumpliendo que $\varepsilon=1V$, así que,

$$i=\varepsilon/(R+r)=1/(1+0{,}2)=0{,}833A$$

por lo que aplicando la ley de Ohm a los extremos de *R*,

$$i=\Delta V/R \ \Rightarrow \ \Delta V=iR=0{,}833\times 1=0{,}833\,V$$

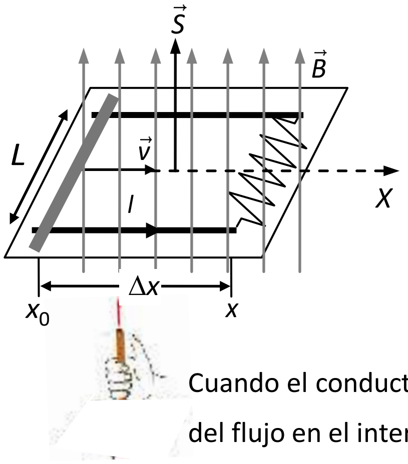
Apartado c)

Utilizaremos en este apartado la ley de Faraday-Lenz para hallar la *fem* inducida y su sentido.

Al desplazar el conductor hacia la derecha, el flujo a través del circuito cerrado disminuye, ya que el número de líneas de inducción que lo atraviesan es cada vez menor. Por lo tanto, de acuerdo con la ley de Faraday-Lenz, en el circuito se induce una *fem* inducida igual a,

$$\varepsilon = -d\Phi/dt \ (2); \text{ donde } \varepsilon = -\Delta\Phi/\Delta t \ (3) \text{ solo si } \varepsilon = cte \text{ (o sea, si } \Delta\Phi \propto \Delta t\text{)}$$

El sentido común nos dice que al ser $v = cte$, la *fem* también lo es (es decir, $\Delta\Phi \propto \Delta t$), por lo que podemos usar la ecuación (3) directamente; pero lo vamos a demostrar.



Hagamos que el conductor se mueva en el sentido positivo del eje *OX* (ver figura) y supongamos que en el intervalo de tiempo Δt se desplaza desde el punto x_0 al x, entonces el desplazamiento es $\Delta x = x - x_0$.

Por ser el campo magnético constante, la superficie del circuito (*S*) plana y $\vec{B}$ perpendicular a *S*, el flujo a través de la espira que forma el circuito es,

$$\Phi = BS\cos 0 = BS$$

Inicialmente el conductor está en el punto x_0, por lo que se cumple que,

$$S = L\Delta x \Rightarrow \Phi_i = BL\Delta x$$

Cuando el conductor llega al punto *x* está pegado a *R*, por lo que $S = 0 \Rightarrow \Phi_f = 0$. La variación del flujo en el intervalo Δt ha sido,

$$\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = 0 - BL\Delta x = -BL\Delta x \ (3)$$

donde el signo menos indica que el flujo disminuye.

Como el conductor lleva un MRU a lo largo del eje *OX* se cumple que,

$$x = x_0 + v\Delta t \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = v\Delta t \Rightarrow \Delta x/\Delta t = v = cte \text{ (porque } v \text{ es constante)}$$

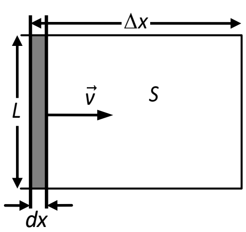
entonces,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{-BL\Delta x}{\Delta t} = -BL\frac{\Delta x}{\Delta t} = -BLv = cte \ (4) \text{ (porque } B, L \text{ y } v \text{ son constantes)} \Rightarrow \Delta\Phi \propto \Delta t$$

Así pues, podemos usar la ecuación (2) que, combinándola con la (4), da la *fem*,

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -(-BLv) = BLv = 1T \times 1m \times 1m/s \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = 1\,\mathrm{V}}$$

Como a medida que pasa el tiempo el flujo disminuye, el sentido de la corriente inducida es tal que crea un campo magnético que se opone a esta disminución. Por ello el campo magnético creado ha de tener el mismo sentido que el original (vertical y hacia arriba). La regla de la mano derecha de la figura determina que el sentido de la corriente es el indicado.



También podemos llegar al mismo resultado sin preocuparnos si la *fem* es o no constante, utilizando la ecuación general $\varepsilon = -d\Phi/dt$.

En un intervalo de tiempo infinitesimal *dt* el desplazamiento del conductor es *dx* (también infinitesimal), como se ve en la figura. Así que el área *S* ha disminuido en,

$$dS = L\,dx$$

Por lo que la variación (infinitesimal) del flujo ha sido,

$$d\Phi = -B\,dS = -BL\,dx$$

donde el signo menos es necesario porque el flujo ha disminuido. Recordando que podemos interpretar a la derivada $d\Phi/dt$ como un cociente entre $d\Phi$ y *dt*,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{-BL\,dx}{dt} = BL\frac{dx}{dt} = BLv = 1T \times 1m \times 1m/s \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = 1\,\mathrm{V}}$$

ya que $v = dx/dt$ es la definición de velocidad en el movimiento rectilíneo.

Apartado d)

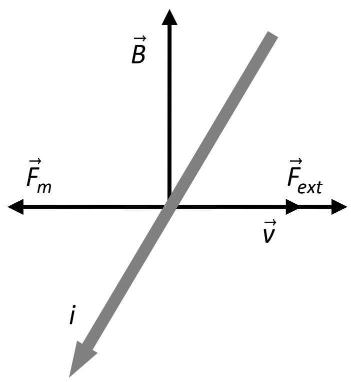
Sabemos que una resistencia disipa energía eléctrica en forma de calor. La energía disipada por unidad de tiempo es la potencia que viene dada por,

$$P = \Delta V\, i = 1V \cdot 1A \;\Rightarrow\; \mathbf{P = 1\,W}$$

Apartado e)

Antes de cerrar el circuito, suponiendo que no hay rozamiento, no es necesaria fuerza alguna para mantener constante la velocidad del conductor móvil, pues no existe ninguna fuerza que se oponga al movimiento que lleva.

Después de cerrar el circuito, el campo magnético en el que se encuentra el conductor (el original) ejerce una fuerza sobre el conductor porque ahora circula por el mismo una intensidad de corriente *i*,



$$\vec{F}_m = i\vec{L} \times \vec{B} \;\Rightarrow\; F_m = iLB\,\mathrm{sen}90 = iLB = 1A \times 1m \cdot 1T \;\Rightarrow\; \boldsymbol{F_m = 1N}$$

La fuerza magnética ejercida sobre el conductor móvil tiene la dirección de la velocidad y sentido opuesto, como se deduce al aplicar la regla de la mano derecha al producto vectorial anterior (ver figura). Por lo tanto, para que el conductor siga con su movimiento uniforme es necesario aplicar una fuerza externa igual y opuesta a F_m, es decir

$$\boldsymbol{F_{ext} = F_m = 1\,N}$$

Apartado f)

La potencia de una fuerza $\vec{F}$ aplicada a un cuerpo que se mueve con velocidad $\vec{v}$ es,

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\varphi$$

donde φ es el ángulo formado por $\vec{F}_{ext}$ y $\vec{v}$ y que en nuestro caso es $\varphi = 0$.

Recuerda que la potencia de una fuerza no es más que el trabajo realizado por unidad de tiempo. Como el trabajo es una forma de transferir energía de un cuerpo a otro, la potencia es la energía transferida por unidad de tiempo.

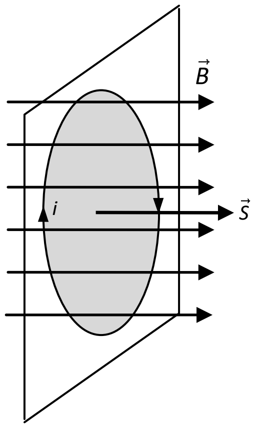
Como $\cos\varphi = \cos 0 = 1$, la potencia (es decir, la energía suministrada por el agente externo por unidad de tiempo) es,

$$P = F_{ext} \cdot v = 1N \times 1m \Rightarrow \boldsymbol{P = 1\,W}$$

es decir, la energía que aporta el agente externo por unidad de tiempo es la misma que la que se disipa en la resistencia. La energía se transfiere del agente externo al circuito (realizando un trabajo sobre él) en forma de energía eléctrica, que luego se disipa en forma de calor a través de la resistencia.

Una bobina de 50 espiras de 8 *cm*^{2} está colocada en un campo magnético de manera que el que el flujo sea máximo. Si el campo varía de acuerdo con la función *B* = 0,200 – 0,0100*t*, halla la *fem* inducida en la bobina.

Solución



Suponemos que el campo magnético, aunque varía en el tiempo, es constante en el espacio; es decir, su valor es el mismo en todos los puntos de la superficie plana delimitada por cada una de las espiras que forman la bobina, como se aprecia en la figura. En estas condiciones podemos aplicar la ecuación,

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\,S\cos\theta$$

donde θ es el ángulo formado por el campo magnético ($\vec{B}$) y el vector $\vec{S}$ (normal a la superficie de la espira), como se ve en la figura.

Para que el flujo sea máximo, $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$; es decir, las espiras tienen que estar colocadas perpendicularmente al campo magnético. Así pues el flujo sobre cada espira es,

$$\Phi = B\,S = (0{,}2 - 0{,}01t)T \times 8\cdot 10^{-4}\ m^2 = (1{,}6 - 0{,}08t)\cdot 10^{-4}\ Wb$$

y la *fem* inducida en la bobina con *N* = 50 espiras es,

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -50\frac{d\left[(1{,}6-0{,}08t)\cdot 10^{-4}\right]}{dt} = 50\times 0{,}08\cdot 10^{-4} = \mathbf{4{,}00\times 10^{-4}}\ \boldsymbol{V}$$

Las conexiones inalámbricas wifi usan ondas electromagnéticas de 2,4 *GHz* de frecuencia. Una antena wifi tiene un tamaño de un cuarto de la longitud de onda. ¿Cuál es su tamaño en milímetros?

Solución

Puesto que $1GHz = 10^9\ Hz$, tenemos que la frecuencia *f* es de,

$$f = 2{,}4\ GHz = 2{,}4\times 10^9\ Hz = 2{,}4\cdot 10^9\ Hz$$

En las ondas (también en las electromagnéticas) se cumple que $v = \lambda f$ donde *v* es la velocidad de la onda y λ su longitud de onda. La velocidad de las O.E. es la de la luz (*c*), así que,

$$c = \lambda f \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8\ m\cdot s^{-1}}{2{,}4\cdot 10^9\ Hz(s^{-1})} = 1{,}25\cdot 10^{-1}\ m = 125mm$$

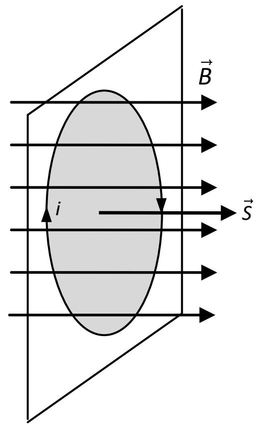
Así que la longitud de la antena (*L*) es,

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{125\ mm}{4} = \mathbf{31{,}2\ mm}$$

Una bobina de 15 espiras circulares de 6,0 *cm* de radio se encuentra situada en una región del espacio en la que hay un campo magnético uniforme y constante de 0,20 *T*. Inicialmente el plano de las espiras es perpendicular al campo magnético.

En *t* = 0 la bobina comienza a rotar uniformemente con respecto a uno de sus diámetros, de manera que el periodo de rotación es de 3,0 *s*. Calcula la *fem* inducida en la bobina en el instante *t* = 2,0 *s*.

Solución



Puesto que $\vec{B} = cte$ y la superficie de las espiras planas, tenemos que,

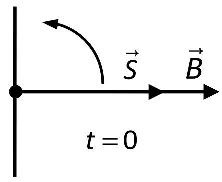
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\,S\cos\theta = B\pi R^2 \cos\theta$$

Donde R es el radio de las espiras y θ es el ángulo formado por el campo magnético ($\vec{B}$) y el vector $\vec{S}$ (normal a la superficie de la espira), como se ve en las figuras.

La bobina gira con un movimiento circular uniforme, así que,

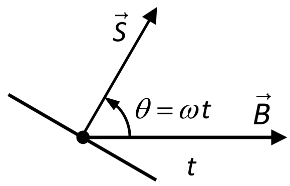
$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega t \\ t_0 = 0 &\Rightarrow \theta_0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \omega t$$

y como en el *MCU* se cumple que $\omega = 2\pi/T$ donde T es el periodo de rotación, al combinar las ecuaciones se cumple,



$$\left.\begin{aligned} \Phi &= B\pi R^2 \cos\theta \\ \theta = \omega t \text{ y } \omega &= 2\pi/T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi = B\pi R^2 \cos\frac{2\pi}{T}t$$

Aplicando la ley de Lenz y Faraday y derivando,



$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left(B\pi R^2 \cos\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{2\pi^2 R^2 NB}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$$

ya que B, N, R y T son constantes. Entonces,

$$\varepsilon(t = 3\,s) = \frac{2\pi^2 R^2 NB}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{2\pi^2 \times 0{,}06^2 \times 15 \times 0{,}2}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\times 2\right) = 2\pi^2 \sin\frac{4\pi}{3} = \mathbf{-0{,}0615\,V = -61{,}5\ mV}$$

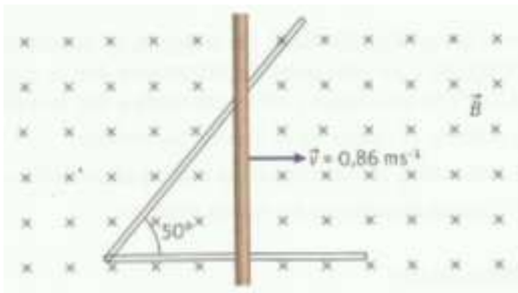
Una barra conductora vertical se mueve a velocidad constante *v* = 0,86 *m/s* sobre dos railes fijos conductores que forman un ángulo de 50º entre sí. La posición inicial de la barra vertical es la del punto donde se unen los raíles. En la región hay un campo magnético uniforme cuya intensidad es *B* = 0,25 *T* dirigido hacia el interior de la página.

a) Determina el flujo magnético a través de la superficie cerrada por los raíles y barra en el instante *t* =1,5 *s*

b) Determina la *fem* inducida en el circuito en *t* = 2 *s*.

Solución

Apartado a): Como el campo magnético es constante y perpendicular a la superficie,



$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos 0 = BS \quad (1)$$

Si en el instante $t = 1{,}5\ s$ la barra vertical está en la posición de la figura, tenemos que $S = ½xy$ y $\tan 50 = y/x$; por tanto,

$$\left.\begin{aligned} S &= ½xy \\ \tan 50 = y/x \Rightarrow y &= x\tan 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\tan 50 \cdot x^2 \quad (2)$$

Como el movimiento es rectilíneo uniforme y en el instante inicial la barra vertical está en el origen de coordenadas, se cumple que,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ x_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = vt \quad (3)$$

por lo que combinando las ecuaciones (1), (2) y (3), llegamos a,

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= BS \\ S &= ½\tan 50 \cdot x^2 \\ x &= vt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}\tan 50 Bv^2t^2 = \frac{1}{2}\tan 50 \times 0{,}25 \times 0{,}86^2 \times 1{,}5^2 = \mathbf{0{,}258\ Wb}$$

Apartado b): La expresión general del flujo (en función de *t*) es $\Phi = ½\tan 50 Bv^2t^2$. Como la *fem* inducida es la derivada del flujo respecto al tiempo con signo negativo,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\tan 50 Bv^2t^2\right)$$

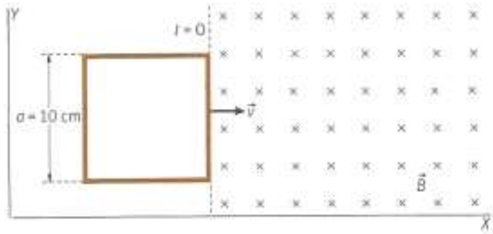
como *B* y *v* son constantes, y $d\Phi/dt$ ha de ser positiva porque al aumentar *t*, también aumenta Φ (esto es así porque el área de la superficie que atraviesa el campo magnético es mayor), tenemos al resolver la derivada que,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\tan 50 Bv^2t = -\tan 50 \times 0{,}25 \times 0{,}86^2 \times 2 = \mathbf{-0{,}441\ V}$$

Apartado c): aunque no lo pide el problema, vamos a hallar el sentido de la intensidad de corriente en el circuito. Como el flujo del campo magnético aumenta, para que se conserve la energía, la intensidad de corriente inducida ha de crear un campo magnético $\vec{B}'$ que se oponga al aumento del flujo. Y como el campo magnético original $\vec{B}$ está orientado hacia dentro del papel, para que el campo creado por la corriente $(\vec{B}')$ se oponga a $\vec{B}$ es necesario que esté orientado hacia afuera del papel. De acuerdo con la regla de la mano derecha, esto se consigue si la intensidad de corriente tiene el sentido indicado en la figura.

Una espira cuadrada de 4 vueltas y lado *a* = 10 *cm* se encuentra inicialmente en la posición que se ve en la figura, en el límite de una región en la que hay un campo magnético de 0,25 *T* perpendicular al plano de la espira y hacia el interior de la página. En el instante *t* = 0, la espira comienza a moverse con velocidad constante *v*.
Si aparece una corriente *I* = $1{,}0\cdot10^{-5}$ *A* en la espira durante un intervalo de tiempo de 4,0 *s*, ¿cuál es la velocidad de la espira? ¿y su resistencia?

Solución

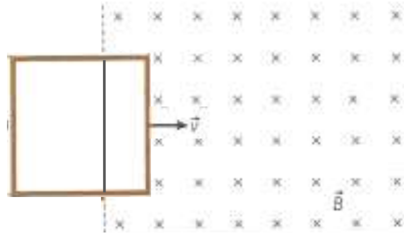


Apartado 1º: Observa que si aparece una intensidad en la espira durante 4 *s*, es que se induce una *fem* durante ese tiempo. Por lo tanto, al lado izquierdo de la espira le lleva 4 *s* alcanzar la región del campo magnético. La razón es sencilla: una vez que **toda** la espira está dentro del campo, el flujo no cambia; es decir, es constante, por lo que,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0 \text{ al ser } \Phi = cte$$

Entonces, como el movimiento es rectilíneo uniforme (ver figura),

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x = vt \\ \Delta x = a\end{array}\right\} \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{a}{t} = \frac{10}{4} = \mathbf{2{,}5\ cm/s}$$



Apartado 2º: Al cabo de un tiempo arbitrario *t* (menor de 4 *s*) la espira ha efectuado un desplazamiento Δx, por lo que, recordando que $\Delta x = vt$, el área de la espira que está dentro del campo es,

$$S = a\Delta x = avt$$

Aplicando la definición del flujo y la ley de Faraday-Lenz,

$$\left.\begin{array}{r}\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos 0 = Bavt \\ \varepsilon = -N\,d\Phi/dt\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon = -N\frac{d}{dt}(+Bavt) = -NBav = -4\times0{,}25\times0{,}1\times2{,}5\cdot10^{-2} = -2{,}5\cdot10^{-3}\,V$$

donde el signo más dentro de la derivada se debe a que el flujo aumenta. Ahora aplicamos la ley de Ohm generalizada a la espira tomando el valor absoluto de la *fem*, ya que el signo menos no tiene sentido en la ley de Ohm,

$$i = \frac{|\varepsilon|}{\cancel{R}+r} = \frac{|\varepsilon|}{r} \Rightarrow r = \frac{|\varepsilon|}{i} = \frac{2{,}5\cdot10^{-3}\,V}{1\cdot10^{-5}\,A} = \mathbf{250\ \Omega}$$

Nota que no hay ninguna resistencia *R* conectada a las espiras. La única resistencia es la interna de la propia bobina.

Se dispone de un mol de átomos de U-239 y se sabe que su periodo de semidesintegración es de 24 *min*.

a) Calcula el número de núcleos que hay después de 1 día.

b) ¿Cuál será la actividad de la muestra en ese momento?

Solución

Apartado a): Sabemos que,

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 e^{-\lambda t} \\ t_{1/2} = \ln 2/\lambda \Rightarrow \lambda = \ln 2/t_{1/2} \end{array}\right\} \Rightarrow N = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{24\,min}\times(1\times 24\times 60)\,min} = 8,67\cdot 10^{-19} N_0$$

Como tenemos un mol de núcleos,

$$n_0 = \frac{N_0}{N_A} \Rightarrow N_0 = n_0 N_A = 1\,\cancel{mol}\times 6,02\cdot 10^{23}\,\frac{núcleos}{\cancel{mol}} = 6,02\cdot 10^{23}\,núcleos$$

por lo tanto, combinando las dos ecuaciones, llegamos a,

$$N = 8,67\cdot 10^{-19}\times 6,02\cdot 10^{23}\,núcleos = \mathbf{5,22\times 10^{5}}\ \text{núcleos}$$

Apartado b): Aplicando la fórmula de la actividad,

$$\left.\begin{array}{r} A = \lambda N \\ \lambda = \ln 2/t_{1/2} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} N = \frac{\ln 2}{(24\times 60)\,s}\times 5,22\cdot 10^{5}\,núcleos = \mathbf{251\ Bq}$$

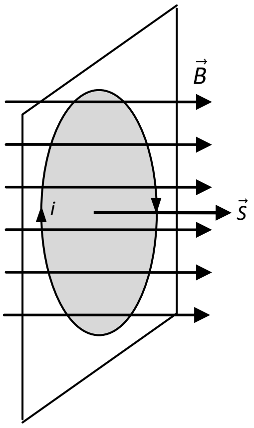
PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD (UPNA)

Una espira conductora de 10 *cm* de radio se encuentra en una región del espacio donde existe un campo magnético de dirección paralela a la del eje de la espira y de módulo variable según la expresión *B* = 5 sen 314*t* *mT*. Calcula la expresión de la fuerza electromotriz inducida (*fem*). (S07)

Solución

El flujo magnético a través de la espira es,

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\,S\cos\theta = 5\sin 314t\cdot\pi R^2 = \pi R^2\cdot 5\sin 314t$$



ya que θ es el ángulo formado por $\vec{B}$ y la perpendicular a la superficie de la espira que, como se ve en la figura, es de 0º ($\cos\theta = \cos 0 = 1$).

Para que la unidad del flujo sea el *Wb* (Weber) que es la unidad del S.I., es necesario que la inducción magnética se exprese en *T* (Teslas) y el radio de la espira en *m*. Por lo tanto, como la inducción viene dada en *mT* y el radio en *cm*, la expresión del flujo en *Wb* es,

$$\Phi = \pi R^2\cdot 5\sin 314t = \pi\times 0{,}1^2\,m^2\times 5\cdot 10^{-3}\sin(314t)\,T = 1{,}57\cdot 10^{-4}\sin(314t)\ Wb$$

Aplicando ahora la ley de Lenz,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(1{,}57\cdot 10^{-4}\sin 314t\right) = \mathbf{-4{,}93\times 10^{-2}\cos 314}\boldsymbol{t}\ \boldsymbol{V}\ \text{(voltios)}$$

Por ejemplo, la f.e.m. al cabo de 5 s es,

$$\varepsilon(5s) = -4{,}93\cdot 10^{-2}\cos 314\cdot 5 \approx -4{,}93\cdot 10^{-2}\cos 500\pi =$$
$$= -4{,}93\cdot 10^{-2}\cos 250\cdot 2\pi = -4{,}93\cdot 10^{-2}\ V$$

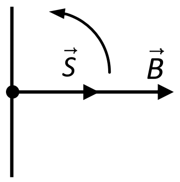
El signo menos no significa que la fe. es negativa, sino que se opone a la variación del campo magnético que produce.

Una bobina formada por 300 espiras cuadradas de 9 cm de lado gira uniformemente a razón de 3.000 vueltas/minuto en un campo magnético uniforme de valor 0,2 T. Halla: (J03)

a) La expresión de la fuerza electromotriz inducida.

b) Representarla gráficamente indicando sus valores máximo y eficaz.

Solución



Apartado a) La figura esquematiza la espira cuadrada (vista de perfil) que gira en el interior de un campo magnético constante. Como no nos dicen cual es la posición de la espira cuando se empieza a contar el tiempo, la colocamos en la posición más fácil, que es perpendicular al campo magnético (vectores $\vec{S}$ y $\vec{B}$ paralelos).

En estas condiciones el flujo a través de cada espira de la bobina es,

$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta = BS\cos(\omega t+\varphi) = BS\cos\omega t$ pues $\varphi = 0$ al ser $\vec{S}$ y $\vec{B}$ paralelos en t = 0.

y la *fem* inducida en las *N* espiras es,

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} = N\omega BS\sin\omega t$$

Recuerda que para que la *fem* salga en voltios (unidad del SI), las unidades de todas la magnitudes han de venir expresadas en el SI. Entonces,

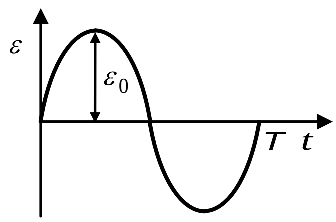
$$S = 9\ cm \times 9\ cm = 9\cdot 10^{-2}\ m \times 9\cdot 10^{-2}\ m = 8{,}10\times 10^{-3}\ m^2$$

$$\omega = 3000\frac{vueltas}{\text{min}} = 3000\times\frac{2\pi\ rad}{60\ s} = 100\pi\ \frac{rad}{s}$$

por lo tanto,

$$\varepsilon = N\omega BS\sin\omega t = 300\times 100\pi\times 0{,}2\times 8{,}1\cdot 10^{-3}\sin 100\pi t = \mathbf{153\sin 100\pi t\ V}$$

Apartado b)



Para representar gráficamente ε frente a t damos valores a t empezando desde cero. A lo largo de un periodo (T) se obtiene la gráfica indicada en la figura.

Puesto que,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 2{,}00\cdot 10^{-2}\ s \text{ (no lo pide el problema)}$$

La *fem* máxima (ε_0) se obtiene haciendo $\sin\omega t = -1$ en la ecuación de la *fem*,

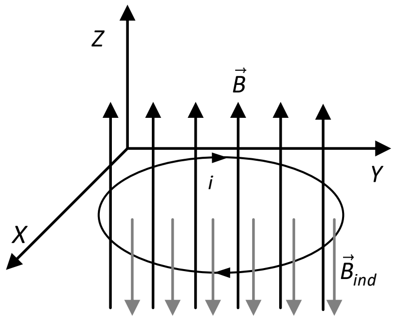
$$\boldsymbol{\varepsilon_0} = N\omega BS = 300\times 100\pi\times 0{,}2\times 8{,}1\cdot 10^{-3} = \mathbf{153}\ V$$

Observa que hay que igualar el seno a –1 porque en la ecuación de la *fem* aparece un signo negativo.

Finalmente, la *fem* eficaz se define como,

$$\boldsymbol{\varepsilon_{ef}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = \frac{153}{\sqrt{2}} = \mathbf{108}\ V$$

Una espira circular de radio *R* = 4 *cm* está en un plano *XY*. Aplicamos un campo magnético en sentido positivo del eje *OZ* que varía linealmente con de 0,1 *T* a 0,8 *T* en 0,2 *s*. Calcular la *fem* inducida e indicar el sentido de la corriente inducida.



Solución

Que el flujo varía linealmente en el tiempo significa que su variación es directamente proporcional al tiempo, así que se cumple que,

$$-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Como el campo magnético es perpendicular a la superficie de la espira tenemos que,

$$\Phi = B\,S = B\pi R^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{fin} - \Phi_{ini} = B_{fin}\pi R^2 - B_{ini}\pi R^2 = \left(B_{fin} - B_{ini}\right)\pi R^2 = (0{,}8 - 0{,}1)\times\pi\times\left(4\cdot 10^{-2}\right)^2 = 3{,}52\cdot 10^{-3}\ Wb$$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{3{,}52\cdot 10^{-3}}{0{,}2} = \mathbf{-1{,}76\cdot 10^{-3}\ V}$$

La *fem* crea un campo magnético que se opone a la variación del campo que la produce. En este caso el flujo magnético que atraviesa la espira aumenta, por lo que la corriente inducida ha de crear un campo magnético que disminuya el flujo. Como se ve en la figura, esto se consigue creando un campo magnético $\vec{B}_{ind}$ de sentido opuesto al campo aplicado $\vec{B}$; es decir, vertical y dirigido hacia abajo.

La regla de la mano derecha aplicada a la espira determina que corriente inducida ha de tener el sentido indicado en la figura para crear el campo $\vec{B}_{ind}$.