Cómo midió Aristarco la Luna y el Sol

Juan Meléndez Sánchez

Curso de humanidades "Las ideas de la ciencia"

Universidad Carlos III de Madrid

Eratóstenes y Posidonio usaron la trignonometría para medir el tamaño de la Tierra, una empresa mucho más audaz que las de Tales. Pero hubo un hombre más audaz aún: Aristarco de Samos, que se propuso medir el tamaño del Sol y de la Luna. Y que, asombrosamente, lo consiguió.

Hay que recalcar que medir el tamaño de estos astros tiene un interés doble, porque si conocemos su tamaño podemos saber a qué *distancia* se encuentran. La idea es que un objeto de un tamaño determinado se ve más o menos grande según que esté más o menos lejos: el *tamaño aparente* nos da una idea de la distancia.

Pero para convertir esta idea en una medida, primero tenemos que precisarla. Ante todo, ¿qué quiere decir que un objeto "se ve grande"? Quiere decir que su *tamaño angular* es grande, es decir, que el cono visual que determina el objeto (con nuestro ojo como vértice y el objeto como base) tiene un ángulo grande. Ese es el ángulo *subtendido* (es decir, abarcado) por el objeto. Medir el ángulo subtendido por un objeto es medir su tamaño aparente y generalmente no es difícil. Entonces, como veremos enseguida, es posible calcular su distancia a partir de su tamaño, o viceversa.

Conviene pues que midamos los tamaños angulares del Sol y la Luna. Es fácil medir el de la Luna, pero no el del Sol: brilla demasiado para mirarlo. Podemos intentarlo algunos días en que las nubes tienen la densidad justa para dejarnos ver su forma sin deslumbrarnos, pero no es necesario, porque resulta que el ángulo que subtiende el Sol (α_S) es prácticamente igual que el que subtiende la Luna (α_L) (ver Figura 1). Podemos saberlo sin medirlo si analizamos los *eclipses de Sol*. En efecto, como la Luna llega a cubrir completamente al Sol, tiene que ocurrir que $\alpha_L \geq \alpha_S$. Pero como los eclipses duran muy pocos minutos, el exceso de tamaño de la Luna tiene que ser muy pequeño (una prueba más evidente aún es que hay eclipses anulares, que ocurren cuando la Luna está en la posición de su órbita más lejana de la Tierra y se ve algo más pequeña). Así que consideraremos $\alpha_L \approx \alpha_S$ y llamaremos a ambos ángulos α_S (Figura 1). Naturalmente, no hay ninguna razón para que el Sol y la Luna tengan el mismo tamaño aparente: es sólo un extraordinario golpe de suerte para los astrónomos.

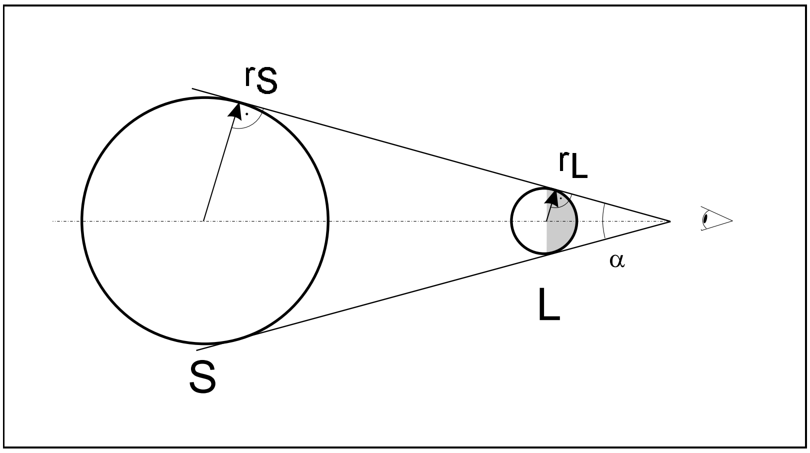

Figura 1: El Sol y la Luna subtienden, vistos desde la Tierra, el mismo ángulo

Por otra parte, los eclipses de Sol demuestran también que la Luna está más cerca que el Sol (¡es la Luna la que tapa al Sol y no al revés!). Y como ambos subtienden el mismo ángulo, la Luna tiene que ser más pequeña que el Sol. Más exactamente: la proporción entre distancias tiene que ser igual que la proporción entre tamaños. Y más exactamente aún, a la vista de la Figura 1:

$$\frac{r_S}{d_{TS}} = \frac{r_L}{d_{TL}} = sen\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

Donde hemos llamado r_S y r_L a los radios del Sol y la Luna; d_{TS} a la distancia de la Tierra al Sol y d_{TL} a la distancia de la Tierra a la Luna.

Esta es la relación entre tamaño (r) y distancia (d) para la Luna y el Sol. Está claro que si medimos α, basta conocer los radios para saber las distancias, y viceversa.

Nos habíamos propuesto medir los tamaños de la Luna y el Sol, es decir, los radios r_L y r_S. Pero hasta ahora no teníamos por dónde empezar. Eratóstenes midió el radio para la Tierra, pero su método exigía tener los pies en la Tierra. La ecuación anterior nos sugiere un punto de partida: ¿no podríamos medir d_{TL} ó d_{TS}? Al fin al cabo, Tales midió la distancia de un barco construyendo un triángulo con estacas en la playa, y ese barco era para él tan innacesible como para nosotros la Luna o el Sol.

La idea consiste, pues, en que tal vez sea posible medir la distancia por un método trigonométrico y luego obtener el tamaño a partir del ángulo subtendido, es decir, de la ecuación 1. Pero en seguida aparecen dificultades. Para construir su triángulo rectángulo, Tales podía caminar por la playa hasta un punto auxiliar que estaba suficientemente separado del punto inicial. Pero cuando nuestro objeto, en vez de un barco, es la Luna o el Sol, ese punto nunca va a estar sufientemente lejos: aunque nuestra playa fuera la Tiera entera, seguiría siendo demasiado pequeña.

Esta dificultad habría bastado para desanimar a cualquiera, pero no a Aristarco. Con su audacia característica pensó: ¿quién nos manda limitarnos a la Tierra? De lo que se trata es de formar un triángulo rectángulo. Un vértice ha de estar en el Sol o la Luna, otro, en la Tierra. ¿Por qué ha de estar el tercero también en la Tierra? Si tenemos tres cuerpos celestes, ¿por qué no colocar cada uno en un vértice?

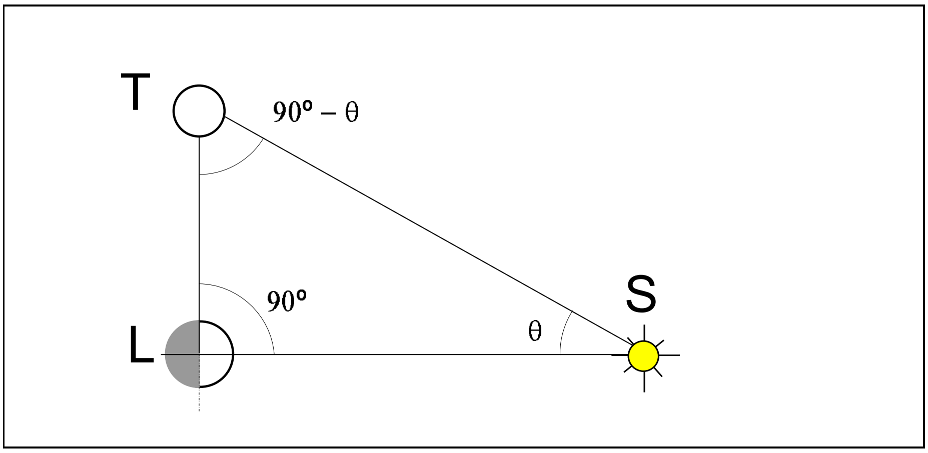

Figura 2: Cómo calcular la proporción entre las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna

Ante todo, le responderemos, porque quizá la Luna, el Sol y la Tierra no tengan a bien, en sus continuas evoluciones, formar un triángulo rectángulo. O quizá lo formen, pero ¿cómo lo podríamos saber? Pensando sobre el asunto (el lector tiene ahora la ocasión de hacerlo también) Aristarco encontró que nuestros tres cuerpos celestes no sólo forman un triángulo rectángulo bastante a menudo, sino que no hace falta ningún cálculo ni observación sofisticada para determinar ese momento (si el lector quiere descubrirlo por sí mismo, que deje aquí de leer porque voy a dar la solución). Es simplemente, cuando media Luna está iluminada y media Luna está oscura. En este momento, a mitad de camino entre Luna Llena y Luna Nueva, los tres cuerpos están necesariamente situados en los vértices de un triángulo rectángulo, con la Luna en el ángulo recto (Figura 2)

De este modo es inmediato que

$$\frac{r_L}{r_S} = \frac{d_{TL}}{d_{TS}} = sen\theta \tag{2}$$

Podemos determinar θ midiendo el ángulo $90 - \theta$ que es el que, en esa configuración, forman el Sol y la Luna vistos desde la Tierra. Aristarco encontró que ese ángulo era de 87^o, y por tanto que $\theta = 3^o$. Como $sen(3^o) = 1/19$, la ecuación anterior implica que el Sol está 19 veces más lejos de la Tierra que la Luna, y por tanto tiene un radio 19 veces mayor.

Hoy sabemos que el radio del Sol es en realidad unas 344 veces mayor que el de la Luna. El ángulo $90 - \theta$ es muy difícil de medir y está bastante más próximo a 90^o de lo que obtuvo Aristarco: es aproximadamente, 1/6 de grado, y $sen((1/6)^o) = 1/344$. El error de la medida de Aristarco no era muy grave: algo menos de 3 grados sobre 90, poco más de un 3 %, pero desgraciadamente la ecuación 2 es muy sensible al valor de θ.

Salvo por este este error numérico, conceptualmente intrascendente, la audaz idea de construir un triángulo rectángulo con cuerpos celestes en vez de con estacas nos ha llevado a un resultado importante: ¡conocemos las distancias y los tamaños *relativos* de la Luna y el Sol!

Pero nuestro objetivo era más ambicioso. Queríamos saber los tamaños *absolutos*. Para eso necesitamos tener un objeto de tamaño conocido con el que comparar. Y no tenemos muchas opciones: el único cuerpo celeste del que conocemos el tamaño es la Tierra. Aristarco se dio cuenta de que hay un acontecimiento que permite comparar los tamaños absolutos de la Tierra y la Luna. Se trata otra vez de un eclipse, pero ahora de un eclipse de Luna.

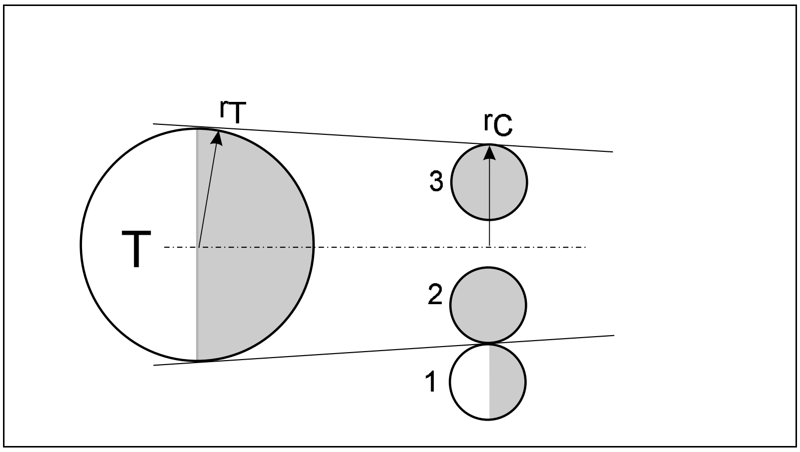

Figura 3: La Luna atravesando el cono de sombra de la Tierra

Durante un eclipse de Luna, esta entra en el cono de sombra de la Tierra, y al cabo de unas pocas horas sale de él. En la Figura vemos la Luna en el momento en que empieza a entrar en la sombra (1), cuando completa su entrada (2) y cuando empieza a salir (3). Aristarco encontró que el tiempo que transcurría entre el instante (1) y el (3) era poco más del doble que entre (1) y (2):

$$t_{13} = nt_{12} \ \ (siendo \ \ n \ \ un \ \ poco \ \ mayor \ \ que \ \ 2)$$

Entre (1) y (2), la distancia recorrida por la Luna es su propio diámetro, $2r_L$. Y entre (1) y (3), la distancia recorrida es el diámetro del cono de sombra, $2r_C$. Como la Luna se mueve en el cielo a velocidad constante, la proporción de los tiempos es igual a la proporción de las distancias:

$$r_C = nr_L \ \ (siendo \ \ n \ \ un \ \ poco \ \ mayor \ \ que \ \ 2) \tag{3}$$

Tenemos pues la proporción del radio de la Luna (r_L) no con el de la Tierra (r_T), pero sí con el de su cono de sombra (r_C).

Y hemos llegado así a que si conocemos r_C, nuestro problema está resuelto: conoceremos el radio de la Luna (r_L) y el del Sol (r_S). Vamos a resumir el procedimiento:

- De r_C obtenemos r_L con la ecuación 3 (hay que saber n)
- De r_L obtenemos d_{TL} con la ecuación 1 (hay que saber α)
- De d_{TL} obtenemos d_{TS} con la ecuación 2 (hay que saber θ)
- De d_{TS} obtenemos r_S con la ecuación 1 (hay que saber α)

Lo único que necesitamos son tres datos experimentales que en principio son fáciles de obtener: los ángulos α (Figura 1) y θ (Figura 2) y el factor n, observable en un eclipse de luna (Figura). Pero ¿cuánto vale r_C?

Podemos hacer una primera aproximación sencilla: si suponemos que el Sol está muy lejos (como ya hicimos al medir la altura de la pirámide) sus rayos llegan paralelos, y eso significa que el cono (que más que cono es, entonces, un cilindro) tiene el mismo radio que la Tierra. Con esta aproximación, pues, y usando la ecuación 3, tenemos que:

$$[1^{\text{a}} APROXIMACION]: \quad r_C \approx r_T \implies r_L \approx \frac{r_T}{n} \tag{4}$$

Llegamos a que el radio de la Luna es poco menos de la mitad del de la Tierra, y a partir de este resultado podemos, como hemos dicho más arriba, obtener los valores de los demás datos buscados: r_S, d_{TS} y d_{TL}.

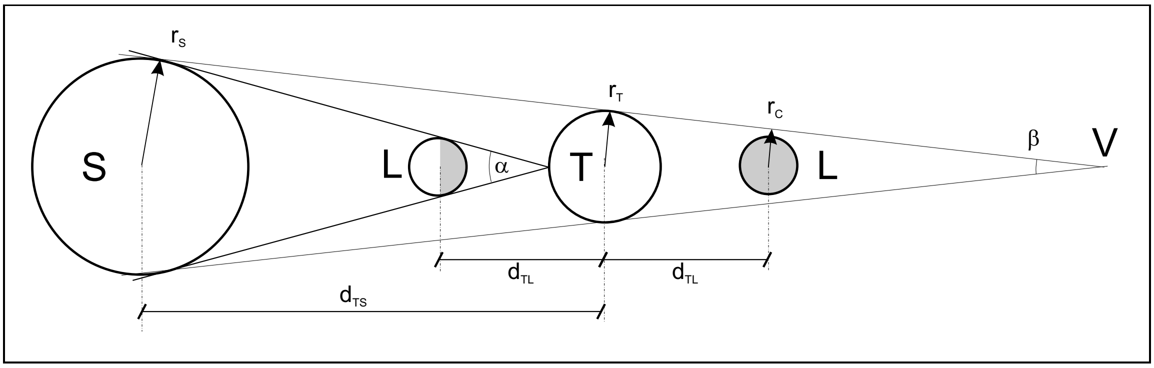

Figura 4: Esquema de tamaños y posiciones para la Tierra, la Luna y el Sol

Esta suposición es muy sencilla, pero no es muy coherente: suponer que los rayos del sol son paralelos es suponer que el Sol está a distancia infinita, lo que tiene sentido si queremos calcular la altura de una pirámide..., ¡pero no cuando precisamente queremos calcular la distancia del Sol! De hecho, habíamos obtenido que estaba a una distancia que es 19 veces la de la Luna...

Podemos hacer otra aproximación fijándonos en la Figura 4, en la que se ha representado la posición de la Luna en un eclipse de Sol (a la izquierda) y en un eclipse de Luna (a la derecha). Sabemos que los eclipses de Sol se ven siempre desde una zona pequeña de la Tierra. Esto significa que, en la distancia de la Luna a la Tierra, el cono de sombra de aquella se estrecha hasta casi convertirse en un punto. Es decir, en una distancia d_{TL} el radio de la sombra se estrecha r_L. En un eclipse de Luna, el radio de la sombra de la Tierra se estrechará también aproximadamente r_L. De este modo llegamos, usando la ecuación 3, a que:

$$[2^{\text{a}} APROXIMACION]: \quad r_C \approx r_T - r_L \implies r_L \approx \frac{r_T}{n+1} \tag{5}$$

Esto sigue siendo una aproximación, pero ¿qué estamos suponiendo al hacerla?. Si examinamos la Figura 4, vemos que suponer que los radios de los conos de sombra de la Luna y la Tierra decrecen lo mismo equivale a suponer que los ángulos α y β son iguales. Esto es lo que ocurre si la distancia al Sol es mucho mayor que la distancia a la Luna; como esto es cierto, la aproximación es correcta, y podríamos dejarlo aquí. Pero Aristarco encontró un modo exacto de resolver el problema.

En la Figura 5 se han sombreado dos triángulos semejantes. El ángulo más agudo de esos triángulos es $\beta/2$, por lo que es inmediato que

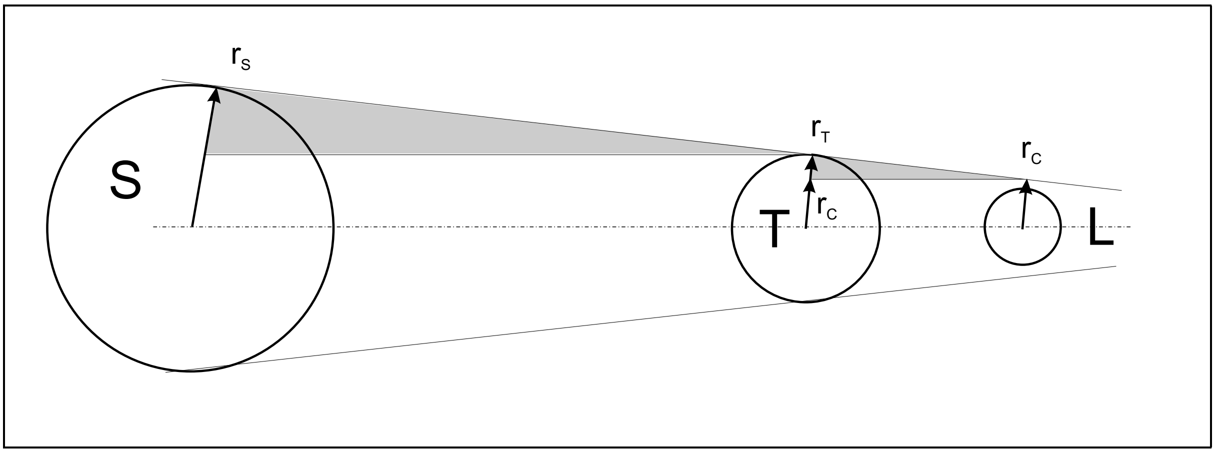

Figura 5: Los triángulos sombreados son semejantes

$$sen(\frac{\beta}{2}) = \frac{r_S - r_T}{d_{TS}} = \frac{r_T - r_C}{d_{TL}} \tag{6}$$

Teniendo en cuenta que según la ecuación (1), $d_{TS}/d_{TL} = r_S/r_L$, se despeja que

$$r_C = r_T - \frac{r_L}{r_S}(r_S - r_T)$$

Y sustituyendo r_S por $\frac{r_L}{sen\theta}$ (ecuación (2)), llegamos al resultado exacto:

$$[EXACTO] : r_L = r_T \frac{1 + sen\theta}{n+1} \tag{7}$$

(se aprecia que el resultado de la "2ª aproximación" anterior es el que se obtiene si θ vale cero, que es lo que ocurriría si el Sol estuviera a distancia infinita).

Como ya dijimos, a partir de r_L, si conocemos α y β, es inmediato obtener d_{TL}, d_{TS} y r_S, mediante las ecuaciones (1) y (2). La tabla siguiente resume los resultados que se obtienen, con el cálculo exacto, en función de los datos que usemos para n, α y β. Se ha tomado como unidad el radio de la Tierra, r_L.

	n	α	θ	r_L	d_{TL}	d_{TS}	r_S
Datos de Aristarco	2	2º	3º	0,35	20,1	384	6,7
Datos correctos	2,7	0,5º	(1/6)º	0,27	62,1	21356	93,2

Los resultados numéricos de Aristarco, especialmente para la distancia al Sol y para su radio tienen errores muy grandes, pero el problema no está en el método, que es perfectamente correcto, sino en que los resultados son muy sensibles a pequeños errores en los datos de entrada, especialmente en θ, que es muy difícil de medir.