ARTÍCULO 1º: TRANSFORMACIONES DE GALILEO Y LORENTZ

1. Introducción

En la mayoría de los libros de texto de Física General las transformaciones de Galileo y de Lorentz aparecen en temas diferentes. Por si fuera poco, se considera a la transformación galileana tan intuitiva y tan asumida que no se explica suficientemente su alcance en la Mecánica Clásica ni por qué todos los observadores *inerciales* (esto es, que no llevan aceleración) tienen que escribir las leyes físicas de la misma forma.

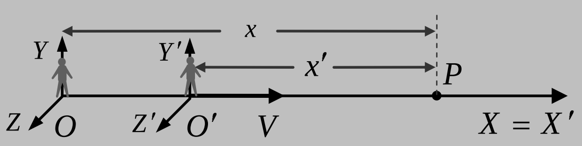
Por otro lado, cuando en los textos de Física se dice que la teoría de Maxwell no cumple la transformación de Galileo, rara vez se explica o se prueba que es así. Tampoco suelen aclarar qué razones llevaron a Einstein a cuestionar la transformación de Galileo y sustituirla por la transformación de Lorentz.

En este artículo se trata de explicar las dos transformaciones paso a paso, de comprender su importancia en la Física y de dar respuesta a las preguntas anteriores. El objetivo es que se comprendan los fundamentos; es por esto que evitarán los desarrollos matemáticos complejos, que podrían conducir a lo contrario.

Por ejemplo, siempre que no haya pérdida de generalidad, consideraremos movimientos rectilíneos a lo largo de un eje coordenado del sistema de referencia y fuerzas que actúen en ese eje. De este modo las magnitudes vectoriales posición, velocidad, momento lineal, aceleración y fuerza quedan determinadas por sus respectivas componentes en ese eje y las correspondientes ecuaciones no son vectoriales, sino escalares.

2. Transformación de Galileo y principio clásico de la relatividad

2.1. Transformación de Galileo

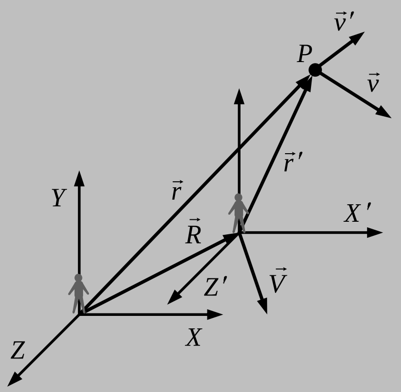


En la figura se muestran dos observadores O y O' situados en dos sistemas de referencia *inerciales* diferentes, de modo que O' se mueve respecto a O a lo largo del eje OX común con un movimiento rectilíneo uniforme de velocidad V. P es un punto material que se mueve, a lo largo de OX, con velocidades v y v'

respecto a O y a O'. Las posiciones de P respecto a O y a O' quedan determinadas por sus respectivas coordenadas x y x'.

Queremos comparar la descripción del movimiento del punto P que hacen los dos observadores. De la figura se desprende que,

$$x = \overline{OO'} + x'$$



pero si realizamos el experimento de modo que O y O' coincidan en el mismo punto en el instante en el empezamos a contar el tiempo y ponemos el reloj a cero ($t_0 = 0$), puesto que la velocidad V de O' respecto a O, es constante, tenemos que para un instante arbitrario t se cumple que,

$$\overline{OO'} = Vt \;\Rightarrow\; x = x' + Vt \;\Rightarrow\; x' = x - Vt \quad (1.1)$$

En el caso general de que P y O' no se muevan en la dirección de uno de los ejes (ver figura), la ecuación (1.1) habría que escribirla vectorialmente,

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t \quad (1.2)$$

Es muy importante destacar que, aun en el caso general, estamos considerando que O' se mueve con velocidad constante respecto a O y que $O'X'Y'Z'$ no lleva movimiento de rotación alguno respecto a $OXYZ$.

En el caso particular, pero importante, de que la velocidad $\vec{V}$ sea paralela al eje OX, obtenemos que,

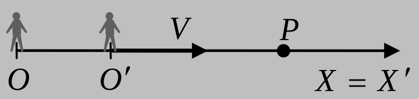
$$V_x = V, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0$$

y, al expresar la ecuación (1.2) en sus componentes, tendríamos,

$$\boxed{x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t} \quad (1.3)$$

El conjunto de ecuaciones (1.3) se denominan *ecuaciones de la transformación Galileana* o, simplemente, *transformación de Galileo*.

Hemos añadido $t' = t$ para enfatizar que estamos suponiendo que el tiempo transcurre igual para ambos observadores; es decir, que las medidas del tiempo son independientes del movimiento de cada observador. Esto es algo que está muy de acuerdo con el sentido común, pero que es sólo una suposición que puede ser desechada de forma experimental.



Consideremos nuevamente el movimiento de O' y de P a lo largo del eje OX común, como se ve en la figura. La velocidad de P respecto a O se define como $v = dx/dt$ y la de P respecto a O' como $v' = dx'/dt$. Derivando la ecuación (1.3) respecto al tiempo, notando que V es constante, tenemos,

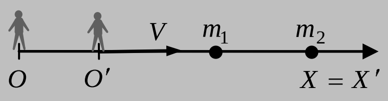
$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V\frac{dt}{dt} \;\Rightarrow\; v' = v - V \quad (1.4)$$

que relaciona las velocidades de los dos observadores. En el caso general de que P y O' se muevan en direcciones arbitrarias, la ecuación (1.4) habría que escribirla en su forma vectorial, es decir,

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} \quad (1.5)$$

2.2. Principio clásico de la Relatividad

Estamos interesados en verificar el hecho de que si las leyes de la Mecánica son válidas para un observador inercial, también lo son para todos los demás observadores inerciales. En realidad es necesario confirmarlo únicamente para el *principio de conservación del momento lineal* y para la *definición de fuerza*, ya que las demás leyes de la Mecánica se derivan de esas dos.



Consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas, y sean v_1 y v_2 sus velocidades medidas por un observador inercial O, como se ilustra en la figura. El momento lineal se define como el producto de la masa por la velocidad, esto es,

$$p = mv$$

Si las fuerzas externas que actúan sobre las partículas se anulan, la ley de conservación del momento lineal requiere que,

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = cte \quad (1.6)$$

Para otro observador inercial O' que se mueve relativamente a O a lo largo del eje OX común con velocidad constante V (ver figura), las velocidades de m_1 y m_2[1], de acuerdo con la ecuación (1.4), son,

$$v_1' = v_1 - V \Rightarrow v_1 = v_1' + V \quad \text{y} \quad v_2' = v_2 - V \Rightarrow v_2 = v_2' + V$$

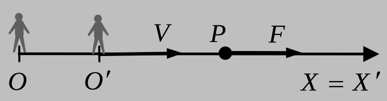
Al sustituir estos valores en la ecuación (1.6) tenemos,

$$m_1(v_1' + V) + m_2(v_2' + V) = cte \Rightarrow m_1 v_1' + m_2 v_2' = cte - \ m_1 + m_2 \ V$$

y como, al igual que las masas, V es constante, llegamos a,

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = cte'$$

que es una ecuación matemáticamente idéntica a la (1.6) y, por consiguiente, *ambos observadores constatan la conservación del momento lineal.*



Veamos ahora la fuerza medida por los dos observadores. Supongamos que O y O', que se mueve respecto a O a lo largo del eje OX común con velocidad constante V, observan una partícula P de masa m que se mueve en el eje OX con aceleración. Si v y v' son las velocidades de la partícula medidas por O y O' en el instante t, aplicando la ecuación (1.4) tenemos,

$$v' = v - V \ \Rightarrow \ v = v' + V$$

Ahora bien, la aceleración de P respecto a O se define como $a = dv/dt$ y la de P respecto a O' como $a' = dv'/dt$. Derivando la ecuación anterior respecto al tiempo, notando que V es constante, tenemos,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v' + V) = \frac{dv'}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{dv'}{dt} \ \Rightarrow \ a = a'$$

Es decir, O y O' miden la misma aceleración. Puesto que la fuerza se define como la derivada del momento lineal respecto al tiempo, tenemos que,

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma \\ F' &= \frac{dp'}{dt} = \frac{d}{dt}(mv') = m\frac{dv'}{dt} = ma' \end{aligned}\right\}$$

En vista de que $a = a'$, concluimos que $F = F'$. Por lo tanto, *ambos observadores inerciales miden la misma fuerza sobre la partícula.*

La fuerza y la aceleración tienen el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Las magnitudes que cumplen esta propiedad reciben el nombre de *invariantes de Galileo*.

El hecho de que todas *las leyes de la Mecánica deben ser las mismas para todos los observadores inerciales* constituye el *Principio Clásico de la Relatividad*.

[1] Estamos suponiendo que los dos observadores miden la misma masa para la partícula. Esta suposición, que está basada en la experiencia, es cierta siempre que la velocidad sea pequeña comparada con la de la luz.

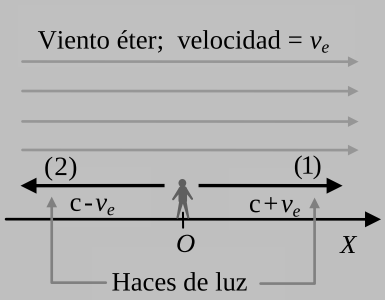
3. Postulados de la relatividad especial y transformación de Lorentz

3.1. Postulados de la Relatividad Especial

En el siglo XIX los científicos creían en la existencia de un medio denominad *éter* que se definió como *una sustancia inmaterial y fija que se extiende por todo el Universo y que puede fluir a través de todos los materiales que se mueven en su seno*. Se pensaba que un sistema de referencia fijo respecto al éter sería el sistema de referencia en reposo absoluto. Se creía también que el éter era el soporte de propagación de las ondas luminosas

Al interpretar a las ondas luminosas como oscilaciones en el éter, se concluyó que, al igual que ocurre con las ondas mecánicas, la velocidad de las mismas es constante respecto al éter y, por lo tanto, independiente de la fuente emisora. La constancia de la velocidad de la luz respecto al éter debería proporcionar un método para medir movimientos absolutos. En efecto, la luz es una vibración en el éter, que está en reposo absoluto, y su velocidad es constante respecto a éste; por lo tanto, la medida de la velocidad de la luz que haga un observador en movimiento respecto al éter dependerá sólo de su propio movimiento.

En el año 1887 Albert A. Michelson y Edward W. Morley, partiendo de la hipótesis de la constancia de la velocidad de la luz respecto al éter, realizaron un experimento para medir el movimiento absoluto de la Tierra; es decir, la velocidad de la Tierra respecto al éter (lo que se dio en llamar *viento de éter*). El experimento consistía básicamente en medir la velocidad de haces de luz moviéndose en la misma dirección pero en sentidos opuestos. De este modo, la velocidad observada de cada haz de luz respecto a la Tierra dependería de la dirección y sentido del viento de éter con respecto al haz.



La figura y la transformación de velocidades de Galileo nos ayudan a determinar la velocidad de cada haz de luz medida por el observador (fijo en la Tierra). En efecto, sean dos sistemas de referencia inerciales ligados, respectivamente, a la Tierra y al éter; de acuerdo con la transformación de velocidades de Galileo, tenemos que,

$$v = v' + V$$

donde v representa la velocidad de la luz respecto al observador en Tierra, V la velocidad del éter respecto a la Tierra y v' la velocidad de luz respecto al éter. Puesto que la velocidad de la luz respecto al éter es constante e igual a c para el haz (1) y $-c$ para el (2) y la velocidad del éter respecto a la Tierra es v_e, deducimos que,

$$\text{Haz (1)} \Rightarrow \; v_1 = c + v_e \text{ ó } |v_1| = c + v_e$$

$$\text{Haz (2)} \Rightarrow \; v_2 = -c + v_e = -(c - v_e) \Rightarrow |v_2| = c - v_e$$

es decir, que la velocidad de los haces de luz medidas por el observador deberían ser diferentes, lo que demostraría la existencia del *viento de éter* y permitiría hallar la velocidad de la Tierra respecto a éste.

El resultado del experimento mostró que la velocidad de los dos haces era exactamente la misma; o sea, que no apreciaron absolutamente ningún efecto del *viento del éter*.

En el año 1865 el científico escocés James Clerk Maxwell publicó su teoría del Electromagnetismo, que ha sido verificada experimentalmente en multitud de ocasiones, obteniéndose siempre resultados acordes con la experiencia. El físico alemán de origen judío, Albert Einstein, que creía firmemente que la teoría del Electromagnetismo era correcta, sabía que sus ecuaciones no mantienen su forma (es decir, no son invariantes) ante una transformación de Galileo; esto es, no son consistentes con la Mecánica Clásica. Este problema (y algunas contradicciones que aparecieron en ciertos experimentos electromagnéticos) lo resolvió Einstein en el año 1905, cuando publicó *la teoría de la Relatividad Especial o Restringida*, basada en los dos postulados fundamentales siguientes:

1. *Todas las leyes físicas son las mismas (o sea, permanecen invariantes) para todos los observadores inerciales (esto es, con movimiento relativo de traslación uniforme).*

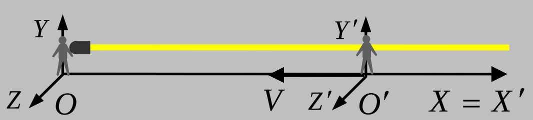
   Este postulado extiende el principio de la Relatividad de Galileo de la Mecánica a todas las leyes de la Física. Esto implica que *no es posible, mediante ningún experimento realizado, distinguir un sistema inercial de otro*; o bien que, *es imposible conocer el movimiento rectilíneo y uniforme de un sistema por cualquier clase de experimentos realizados en su interior*.

2. *La velocidad de la luz en el vacío es constante e igual para todos los sistemas de referencia inerciales.*

   El postulado explica el resultado negativo del experimento de Michelson y Morley, puesto que la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones, sea cual sea el movimiento de la Tierra.

   Hay que hacer constar que Einstein estaba poco relacionado con las experiencias de Michelson y Morley sobre el *viento del éter*. Sin embargo, su teoría no precisa de la existencia del *éter*. En realidad, Einstein no negó su existencia pero sí su utilidad como referencia absoluta de movimientos uniformes.

   Por otro lado, la constancia de la velocidad de la luz, c¸ no sigue la adición de velocidades que se deduce de la transformación de Galileo (ec. 1.4). En efecto, la figura muestra dos observadores inerciales O y O' de modo que O' se mueve a lo largo del eje OX común acercándose a O con una velocidad V = –50.000 *km/s*. En un instante dado, O envía un haz de luz láser a lo largo del eje OX positivo, que se desplaza a una velocidad c = 300.000 *km/s*. De acuerdo con la ecuación (1.4), la velocidad del haz de luz respecto a O' debería ser

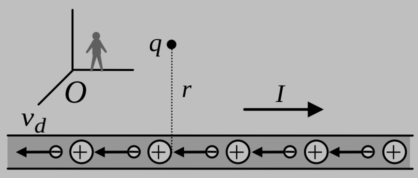


$$v' = c - V = 300.000 - (-50.000) = 350.000\, km/s$$

   Pero la velocidad que mide O' es de 300.000 *km/s*, lo que invalida la transformación de Galileo. Einstein atribuyó estas contradicciones a la interpretación clásica de los conceptos espacio y tiempo. Por lo tanto, se hacía necesario buscar otras *ecuaciones de transformación entre sistemas inerciales, distintas de las de Galileo, bajo las cuales la velocidad de la luz fuera invariante*.

3.2. Incompatibilidades entre el Electromagnétismo y la Mecánica Clásica

La figura muestra una partícula portadora de una carga positiva q en reposo cerca de un alambre recto y largo por el que fluye una corriente de intensi-



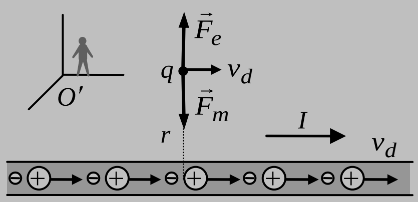
dad I. El sistema es observado desde el sistema inercial O en el que el alambre y q están en reposo. En el interior del alambre hay electrones que se mueven con una velocidad de arrastre v_d y núcleos de iones positivos en reposo; de modo que en cualquier longitud de alambre, el número de electrones es igual al de núcleos positivos, y la carga neta es cero. Puesto que la carga negativa de los electrones a lo largo del alambre es igual a la de los núcleos positivos pero de signo contrario, los campos eléctricos creados por ambos portadores de carga en cualquier lugar son iguales en magnitud pero de sentidos opuestos. Así pues, la fuerza eléctrica ejercida sobre q es nula,

$$\vec{F}_e = q(\vec{E}_+ + \vec{E}_-) = 0 \quad \text{pues} \quad \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$$

Por otro lado, aunque la corriente crea un campo magnético que afecta a q, la fuerza magnética es nula porque q está en reposo respecto al alambre,

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad \text{pues} \quad v = 0$$

Como en este sistema de referencia la fuerza neta sobre q es cero, la aceleración que mide O es cero.



Consideremos ahora la situación desde un sistema inercial O' que se mueve paralelo al alambre a la misma velocidad que la del arrastre de los electrones, v_d, como se ve en la figura. En esta referencia los electrones están en reposo y los núcleos positivos y la carga q se mueven hacia la derecha con velocidad v_d. En este caso q, por estar en movimiento en el campo magnético creado por la corriente de núcleos positivos, está sometida a una fuerza magnética(2) $\vec{F}_m$, como muestra la figura.

De acuerdo con la transformación de Galileo, los observadores inerciales O y O' deben estar de acuerdo en que, si q no lleva aceleración en el sistema O, tampoco existirá aceleración en O'. Por lo tanto, q no puede experimentar fuerza neta alguna en el sistema O'; así que, además de la fuerza magnética, debe existir otra igual y opuesta que la anule (ver figura). Esta fuerza adicional que actúa en el sistema O' tiene que ser necesariamente de origen eléctrico, pero no puede justificarse en el marco de la Mecánica Clásica basada en la transformación de Galileo. Sin embargo, como veremos en su momento, queda completamente explicada al aplicar la teoría de la Relatividad Especial basada en la transformación de Lorentz.

3.3. Las ecuaciones de Maxwell no son invariantes ante una transformación de Galileo (*Opcional*)

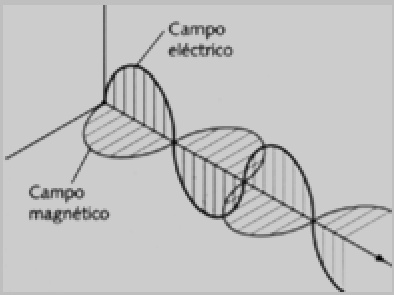
La teoría del Electromagnetismo de Maxwell está sintetizada en cuatro ecuaciones fundamentales (*ecuaciones de Maxwell*), que, además, conducen a fenómenos completamente nuevos. El logro quizá más importante de la teoría fue la predicción de la existencia de *ondas electromagnéticas* y dar cuenta de que la luz podía comprenderse como un tipo de onda electromagnética.

En este punto vamos a probar de una manera sencilla que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes ante una transformación de Galileo, utilizando

---

[2] En el estudio de los campos magnéticos creados por corrientes eléctricas, se prueba que una corriente positiva como la de la figura ejerce sobre la carga positiva q una fuerza vertical orientada hacia abajo.

para ello la ecuación de la onda electromagnética que se obtiene al combinar convenientemente las ecuaciones de Maxwell.



Una onda electromagnética consiste en campos eléctricos y magnéticos, mutuamente perpendiculares, variables en el tiempo. Esta variación genera una perturbación que se propaga en el espacio; es decir, una onda electromagnética. Si los campos varían en el tiempo de forma senoidal, la onda generada será senoidal, que es el tipo de onda más simple. La onda representada en la figura es senoidal y se propaga a lo largo del eje *OX* del sistema de coordenadas elegido; es decir, una onda plana (los campos oscilan sólo en los planos *XZ* y *XY*), monocromática (sólo hay una frecuencia de vibración) y unidimensional (se propaga sólo en la dirección del eje *OX*)[3].

Este enlace visualiza la variación de los campos eléctrico y magnético y la propagación de la perturbación.

Las ecuaciones de los campos eléctrico, *E*, y magnético, *B*, de la onda electromagnética monocromática que se propaga en la dirección del eje *OX* son,

$$E(x,t) = E_0 \sin k(ct - x) \quad (1.7)$$

$$B(x,t) = B_0 \sin k(ct - x) \quad (1.8)$$

donde E_0 y B_0 son, respectivamente, los valores máximos, de los campos eléctrico y magnético; $k = 2\pi/\lambda$ el número de ondas (siendo λ la longitud de onda) y *c* la velocidad de la luz.

Cojamos una de las componentes de la onda, por ejemplo la eléctrica, y derivemos respecto al tiempo[4],

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[E_0 \sin(ct - x)] = cE_0 \cos(ct - x)$$

ya que E_0 = cte y x = cte, pues estamos considerado un punto particular del eje *OX*. Derivemos de nuevo respecto a *t* (o sea, hacemos la 2ª derivada),

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}[E_0 \sin(ct - x)] = -c^2 E_0 \sin(ct - x) \quad (1.9)$$

Derivemos de nuevo la ecuación (1.7) dos veces, pero esta vez respecto a *x* en un instante particular; esto es, haciendo t = cte,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[E_0 \sin(ct - x)] = -E_0 \cos(ct - x)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[-E_0 \cos(ct - x)] = -E_0 \sin(ct - x) \quad (1.10)$$

Al comparar las ecuaciones (1.9) y (1.10) obtenemos que,

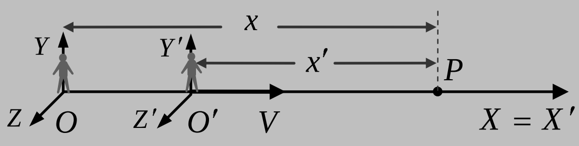
$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}} \quad (1.11)$$

que es la *ecuación diferencial segunda* de la componente eléctrica de la onda electromagnética[5].

[3] Un dispositivo láser puede generar una onda de este tipo.

[4] Se ha sustituido el símbolo de derivada “*d*” por el *derivada parcial* “∂” que significa que al derivar respecto a una variable, las demás se consideran constantes.

[5] Es importante destacar que es la ecuación diferencial la que se obtiene directamente de la combinación de las ecuaciones de Maxwell. Además esta ecuación es independiente de la “forma” de la onda; o sea, es la misma tanto si la onda es senoidal como si no lo es. Aquí



Probemos que la ecuación (1.11) no es invariante ante una transformación de Galileo. El conjunto de ecuaciones que relacionan las coordenadas espaciales y el tiempo medidos por los dos observadores inerciales O y O' de la figura (O' se mueve respecto a O con una velocidad V a lo largo del eje OX común a ambos sistemas de coordenadas), son,

$$x' = x - Vt \Rightarrow x = x' + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1.3)$$

De estas ecuaciones deducimos inmediatamente que,

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - Vt) = 1 \quad (1.12) \quad \text{(se deriva en un } t \text{ particular; o sea } t = \text{cte)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x' + Vt) = V \quad (1.13a) \quad \text{(de deriva en un } x \text{ particular; o sea } x = \text{cte)}$$

Puesto que $t = t'$, es evidente que

$$dt = dt' \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t'} = V \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{V} \quad (1.13b)$$

El observador del sistema de referencia O aplica la ecuación (1.11). Si las ecuaciones de Maxwell fueran invariantes ante una transformación de Galileo, el observador del sistema de referencia O', que se mueve con velocidad constante respecto a O, debería aplicar la ecuación en la misma forma, o sea,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

Veamos si esto se cumple o no. Derivando la componente eléctrica de la onda electromagnética $E(x', t')$ respecto a x, aplicando la regla de la cadena[6] y teniendo en cuenta las ecuaciones (1.12) y (1.13), tenemos,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'} \times 1 + \frac{\partial E}{\partial t'} \times \frac{1}{V} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1}{V}\frac{\partial E}{\partial t'}$$

y volviendo a derivar de nuevo la última ecuación respecto a x,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1}{V}\frac{\partial E}{\partial t'}\right) = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right) + \frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\frac{\partial t'}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} \times 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'}\frac{1}{V}\right) + \frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'} \times 1 + \frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\frac{1}{V}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{1}{V}\frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'} + \frac{1}{V}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} + \frac{2}{V}\frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'} \quad (1.14)$$

---

hemos partido de las ecuaciones (1.7) y (1.8) porque son más familiares (aparecen en todos los textos de Física General).

[6] La regla de la cadena para una función $y = f(x)$ tal que $x = g(t)$ establece que,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Resultado que se puede generalizar a funciones de varias variables. Para una función de dos variables $z = f(x, y)$ tal que $x = g(t, s)$ y $y = h(s, t)$, la regla de la cadena establece que,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

donde se ha sustituido el símbolo de derivada "*d*" por del de *derivada parcial* "∂", ya que al derivar respecto a una variable se consideran constantes las demás. Por ejemplo, la derivada parcial de $z = 2x^2 y - 3y$ respecto a la variable x es: $\partial z / \partial x = 4xy$.

Puesto que $t = t'$, resulta que,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial E}{\partial t'^2} \qquad (1.15)$$

Combinado las ecuaciones (1.11), (1.14) y (1.15) obtenemos que,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} + \frac{2}{V}\frac{\partial^2 E}{\partial t' \partial x'} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

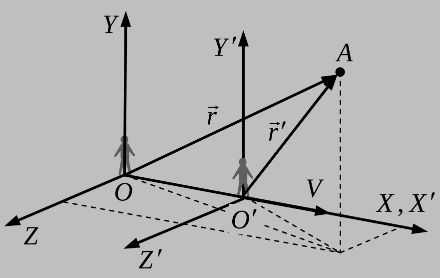
que no mantiene la misma forma que (1.11); esto es, *las ecuaciones de Maxwell no son invariantes frente a una transformación de Galileo*.

3.4. Transformación de Lorentz

Según los postulados de Einstein todas las leyes físicas tienen que permanecer invariantes para todos los observadores con velocidad relativa constante y la velocidad de la luz es una invariante física con el mismo valor para todos los observadores inerciales.

Bajo estas suposiciones, la transformación de Galileo no es válida, en particular la ecuación $t = t'$ no puede ser correcta. Si la velocidad de la luz es la misma para dos observadores con movimiento relativo uniforme, no es posible, como se verá después, que los dos midan el mismo tiempo. En otras palabras, el intervalo de tiempo entre dos eventos no tiene por qué ser el mismo para observadores en movimiento relativo. En definitiva debemos reemplazar la transformación Galileana por otra, de modo que la velocidad de la luz sea invariante.

Como en el caso de la transformación de Galileo, supondremos dos observadores inerciales O y O' de modo que O' se mueve respecto a O con velocidad constante V en la dirección del eje OX común de sus respectivos sistemas de coordenadas, como se ve en la figura. Exigimos que los dos observadores ajusten sus relojes de modo que $t = t' = 0$ cuando sus posiciones coinciden.



Supongamos (ver figura) que para $t = t' = 0$ se emite un destello de luz en la posición común (o sea, cuando O y O' coinciden). Después de un tiempo t el observador O notará que la luz ha llegado al punto A y escribirá $r = ct$, siendo c la velocidad de la luz y r la distancia que recorre desde O hasta A. De la figura se desprende que,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

por lo tanto, también se cumple que,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (1.16)$$

Del mismo modo, el observador O' notará que la luz llega al mismo punto A. Ahora bien, como la distancia cubierta por la luz desde O' hasta A es r' y, como se ve en la figura, $r' < r$, no es posible que se cumpla que $r' = ct$. Puesto que en un movimiento uniforme la distancia es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo, la única opción que queda es que el tiempo medido por O' para el evento sea distinto del que mide O; es decir que, $t \neq t'$.

Entonces el observador O' escribirá $r' = ct'$. Como la figura muestra que,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$$

se cumple, para O', que,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (1.17)$$

Nuestro objetivo es obtener una transformación que relacione las ecuaciones (1.16) y (1.17). Esto significa encontrar un conjunto de ecuaciones que relacionen (x′, y′, z′, t′) con (x, y, z, t) tales que, al expresar (x′, y′, z′, t′) en función de (x, y, z, t) en la ecuación (1.17), obtengamos la (1.16).

Puesto que la Mecánica Clásica, basada en la transformación de Galileo, da resultados satisfactorios cuando se aplica a cuerpos que se mueven a velocidades muy inferiores a la de la luz; por lo tanto, la nueva transformación se ha de reducir a la de Galileo a velocidades muy inferiores a la de la luz.

Las ecuaciones (1.16) y (1.17) nos hacen sospechar que, en nuestro caso (movimiento uniforme de O' respecto a O a lo largo del eje X común y ejes Y y Z con la misma orientación), la nueva transformación ha de ser trivial para y y z; es decir, $y' = y$ y $z' = z$.

A las ecuaciones de transformación tenemos que exigirles que sean lineales (no cuadráticas, por ejemplo); la razón es que *a un acontecimiento en O le tiene que corresponder un solo acontecimiento en O′* (si, por ejemplo, fueran cuadráticas, a un instante particular en un sistema le corresponderían dos en el otro). Además, sabemos con seguridad que la ecuación $t' = t$ tiene que ser modificada.

Dado que la ecuación $x' = x + Vt$ es lineal para x y para t, la dejamos como está. Y puesto que la simetría en las ecuaciones es algo frecuente en Física, proponemos para t' una ecuación lineal “simétrica” a la de x'. Intentemos pues una transformación de la forma,

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t + kx \quad (1.18)$$

donde k es una constante a determinar.

Si nuestra transformación es correcta, al expresar x', y', z' y t' en función de x, y, z, y t en la ecuación (1.17) tenemos que encontrar la (1.16). Entonces,

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (t + kx)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2xVt + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 + c^2 2tkx + c^2 k^2 x^2$$

Observemos que los términos que contienen xt se anulan si hacemos,

$$k = -V / c^2 \Rightarrow t' = t - (V / c^2) x \quad (1.19)$$

y la ecuación se puede escribir como,

$$x^2 + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 + \frac{V^2}{c^2} x^2 \Rightarrow x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

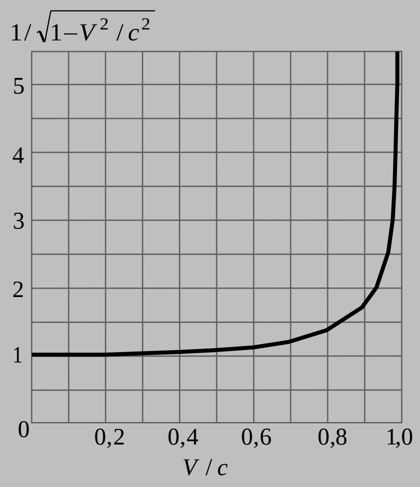
que coincidiría con (1.16) si no fuera por el factor constante $1/(1 - V^2/c^2)$ que multiplica a x^2 y a t^2. Pocemos eliminar este factor haciendo que la transformación sea,

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V / c^2) x}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}} \quad (1.20)$$

que reciben el nombre de *transformación de Lorentz*[7].

---

[7] Reciben este nombre porque fue Hendrik A. Lorentz quien las propuso por primera vez hacia 1890, para resolver ciertas inconsistencias que existían entre la Mecánica Clásica y el Electromagnetismo en conexión con el problema del campo electromagnético de una carga en movimiento.



Observemos que la transformación de Lorentz es lineal en x y t y se reduce a la de Galileo para $V/c \to 0$, ya que entonces, $(1\text{-}V^2/c^2)^{1/2} \approx 1$. En la figura, que muestra la representación gráfica de $(1\text{-}V^2/c^2)^{1/2}$ frente a V/c, se ve que incluso para valores de $V/c \approx 0{,}5$ (que significa una velocidad $V \approx c/2$), el valor de aquel sigue estando próximo a 1. Esta es la razón por la que la transformación galileana es totalmente adecuada para los objetos que se mueven con velocidades ordinarias, incluidos planetas y satélites.

A veces conviene introducir una notación más adecuada para que las ecuaciones tengan una apariencia más sencilla y sean más prácticas. Haciendo,

$$\beta = \frac{V}{c} \quad (1.21) \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.21)$$

las ecuaciones de la transformación del Lorentz quedan como,

$$x' = \gamma(x - Vt) = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - V/c^2(V/c^2)x}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \quad (1.22)$$

Finalmente comprobemos que la transformación de Lorentz mantiene invariante la ecuación,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = ct'^2$$

Utilizando las ecuaciones de Lorentz, expresemos x', y', z' y t' en función de x, y, z y t. Entonces tenemos que,

$$\gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2(t - \beta x/c)^2 \Rightarrow$$

$$\gamma^2(x^2 - 2\beta xct + \beta^2c^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2(t^2 - 2\beta xt/c^2 + \beta^2x^2/c^2)$$

y multiplicando c^2 por los términos del paréntesis del segundo miembro,

$$\gamma^2(x^2 - 2\beta xct + \beta^2c^2t^2) + y^2 + z^2 = \gamma^2(c^2t^2 - 2\beta xct + \beta^2x^2)$$

se ve que los términos en βxct se cancelan, y queda que,

$$\gamma^2(x^2 + \beta^2c^2t^2) + y^2 + z^2 = \gamma^2(c^2t^2 + \beta^2x^2)$$

Ahora coloquemos los términos en x^2 en el primer miembro y los términos en t^2 en el segundo,

$$\gamma^2x^2(1-\beta^2) + y^2 + z^2 = \gamma^2c^2t^2(1-\beta^2)$$

pero de (1.22) se encuentra que,

$$\gamma^2 = 1/(1-\beta^2) \Rightarrow \gamma^2 \cdot (1-\beta^2) = 1$$

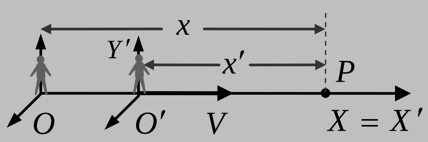
que combinándola con la ecuación anterior conduce a,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

que es la expresión que queríamos encontrar.

3.5. Las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante una transformación de Lorentz (*Opcional*)

Al igual que hicimos en el punto 3.3, partimos de la ecuación (1.11), que es la diferencial segunda de la componente eléctrica de una onda electromagnética unidimensional que se propaga a lo largo del eje OX del sistemas de coordenadas fijado.



Como de costumbre consideramos dos observadores inerciales O y O', de modo que O' se mueve respecto a O con una velocidad V a lo largo del eje OX común a ambos sistemas de coordenadas, como se ve en la figura. La ecuación (1.11) en el sistema de referencia de O es,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Si la ecuación es invariante ante la transformación de Lorentz, al aplicar las ecuaciones (1.20) ó (1.22) debemos obtener una expresión análoga, en la que, en lugar de x y t, tienen que aparecer x' y t'. Como en el punto (3.3), vamos a derivar E dos veces respecto a x y respecto a t usando las ecuaciones (1.22) y la regla de la cadena para funciones de dos variables.

De las ecuaciones de Lorentz obtenemos que,

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(x - \beta ct) = \gamma \quad (1.23) \quad \text{(se deriva en un } t \text{ particular; } t = \text{cte)}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t}(x - \beta ct) = -\gamma\beta c \quad (1.24) \quad \text{(se deriva en un } x \text{ particular; } x = \text{cte)}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = -\gamma\frac{\beta}{c} \quad (1.25) \quad \text{y} \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t}\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = \gamma \quad (1.26)$$

así que, derivando $E(x', t')$ dos veces respecto a x,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma\frac{\partial E}{\partial x'} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial E}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial E}{\partial x'} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial E}{\partial t'}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma\frac{\partial E}{\partial x'} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial E}{\partial t'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\frac{\partial E}{\partial x'} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial E}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial x} =$$

$$= \left(\gamma\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\right)\gamma + \left(\gamma\frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'} - \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\right)\left(-\gamma\frac{\beta}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \gamma^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} - 2\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\right) \quad (1.27)$$

y derivando $E(x', t')$ dos veces respecto a t,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\gamma\beta c\frac{\partial E}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial E}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\gamma\beta c\frac{\partial E}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial E}{\partial t'}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left(-\gamma\beta c\frac{\partial E}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial E}{\partial t'}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(-\gamma\beta c\frac{\partial E}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial E}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t} =$$

$$= \left(-\gamma\beta c\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \gamma\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\right)(-\gamma\beta c) + \left(-\gamma\beta c\frac{\partial^2 E}{\partial t'\partial x'} + \gamma\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}\right)\gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \gamma^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} + \beta^2 c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - 2\beta c\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\right) \quad (1.28)$$

Combinando las ecuaciones (1.11), (1.27) y (1.28), llegamos a,

$$\gamma^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} - 2\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\right) = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2} + \beta^2 c^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} - 2\beta c\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}\right)$$

donde, si cancelamos el término común γ^2, y operamos,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}+\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}-2\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}+\beta^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}-2\frac{\beta}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial x'\partial t'}$$

vemos que se cancelan los términos en $2\beta/c$, por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}+\frac{\beta^2}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}+\beta^2\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}$$

y agrupando los términos en x' y en t' en el primer y en el segundo miembro respectivamente y sacando factor común,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}(1-\beta^2)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}(1-\beta^2)\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t'^2}$$

que es la ecuación (1.11) en el sistema de referencia del observador O'. *Lo que demuestra que las ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo son invariantes ante una transformación del Lorentz.*

3.6. Síntesis

La transformación del Galileo, cuya cuarta ecuación ($t = t'$) está basada en el sentido común, mantiene invariantes las leyes de la Mecánica Clásica en todos los sistemas de referencia inerciales, lo que constituye el Principio Clásico de la Relatividad.

El hecho de que las ecuaciones del Electromagnetismo (teoría que ha sido verificada experimentalmente muchas veces) no son invariantes ante una transformación de Galileo llevó a Einstein a formular una nueva y revolucionaria teoría: *La Relatividad Especial*. La teoría se basa en los dos postulados fundamentales siguientes: 1) *Todas las leyes físicas son idénticas para todos los observadores inerciales* y 2) *La velocidad de la luz en el vacío es constante e igual para todos los observadores inerciales.*

El segundo postulado, confirmado por el fallido experimento de Michelson y Morley, elimina la necesidad del *éter*; esto es, de un sistema de referencia inercial en reposo absoluto o privilegiado respecto a los demás. Entonces, si todos los observadores inerciales son equivalentes, es razonable pensar que *todas las leyes físicas*, no sólo las de la Mecánica, tienen que ser las mismas para todos ellos; que es precisamente lo que afirma el segundo postulado.

Se hace necesario en la nueva teoría encontrar una transformación que, distinta a la de Galileo, que sea consistente con la constancia de la velocidad de la luz, mantenga invariantes todas las leyes de la Física (incluidas las del Electromagnetismo) para todos los observadores inerciales y se reduzca a la de Galileo para velocidades ordinarias (muy inferiores a la de la luz). Esta transformación, denominada transformación de Lorentz, es el conjunto de ecuaciones (1.20).

La propagación de las ondas electromagnéticas es una consecuencia de las ecuaciones de la teoría del Electromagnetismo. No es sorprendente, por lo tanto, que la constancia de la velocidad con la que se propagan estas ondas (que es la de la luz), tenga importantes implicaciones en la forma de las ecuaciones electromagnéticas. En el punto (3.2) vimos un ejemplo de incompatibidad entre el Electromagnetismo y la Mecánica clásica, que queda completamente explicada cuando se aplica la Teoría de la Relatividad.

La transformación del Lorentz se reduce a la de Galileo a velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, por ello son perfectamente válidas cuando se aplican a cuerpos que llevan velocidades ordinarias. Sin embargo, a altas velocidades las cosas cambian; las ecuaciones de Lorentz sugieren que las medidas de la longitud de un objeto y del intervalo de tiempo de un evento pueden ser diferentes para distintos observadores inerciales.

El cambio fundamental en los conceptos de espacio y tiempo como se expresan en la transformación de Lorentz tienen necesariamente que influir en toda la Física. Debemos volver a examinar en primer lugar las leyes de la Mecánica tal y como se desarrollaron y confirmaron para velocidades bajas ($v<<c$) para ver si son compatibles con la teoría de la Relatividad. No será ninguna sorpresa encontrar que las leyes cambian cuando se aplican en otros dominios; pero si lo hacen, ha de ser de tal forma que a velocidades ordinarias tienen que reducirse a las de la Mecánica Clásica, que por experiencia sabemos que son exactas en el límite de bajas velocidades.

Al igual que en la Mecánica Clásica, aceptaremos como leyes físicas posibles aquellas que son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales. Pero en lugar de utilizar las ecuaciones de Galileo para transformar una ley física de un sistema a otro, usaremos ahora la transformación de Lorentz. Es decir, insistiremos ahora en la invariancia de las leyes físicas bajo la transformación de Lorentz, en lugar de la de Galileo.

Las diferencias de longitudes y tiempos medidos desde distintos sistemas de referencia con movimiento relativo constante y la revisión de la Mecánica para ajustarla a la nueva teoría de la relatividad se tratarán en nuevos artículos que se irán publicando.