EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ 3ax + a^2y - 2a^2z = 3 \\ -ax - y + (a^2-1)z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & a^2-3 & 6-2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3} \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a = 0$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \end{array}\right)$$

2º) Si $a = \sqrt{3}$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{array}\right)$$

3º) Si $a = -\sqrt{3}$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow y = 1 + \sqrt{3}x + 2z \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \sqrt{3}\alpha + 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 1 \\ (a^2-3)y - 2(a^2-3)z = 0 \\ (a^2-3)z = a + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{a+\sqrt{3}}{(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{a-\sqrt{3}}} \Rightarrow (a^2-3)y = 2(a^2-3)z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2z \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{a-\sqrt{3}}} \Rightarrow ax = 1 - y + 2z = 1 - 2z + 2z = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{a}}$$

---

[1] $2^a f - 3 \cdot 1^a f$; $3^a f + 1^a f$.
[2] Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
[3] $2^a f + 3 \cdot 1^a f$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P2.
Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 1 & a+3\\ -3 & 1 & 2 & 2\\ -2 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Una matriz es regular, o sea, invertible, si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. Por tanto, el determinante de la matriz A debe ser igual a cero:

$$A=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 1 & a+3\\ -3 & 1 & 2 & 2\\ -2 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}\overset{1}{=}\begin{vmatrix}3 & 0 & -5 & -5\\ -2 & 0 & 1 & a+3\\ -3 & 1 & 2 & 2\\ -2 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}\overset{2}{=}-1\cdot\begin{vmatrix}3 & -5 & -5\\ -2 & 1 & a+3\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}\overset{3}{=}$$

$$=-\begin{vmatrix}3 & -5 & 0\\ -2 & 1 & a+2\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}\overset{4}{=}(a+2)\cdot\begin{vmatrix}3 & -5\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-4(a+2)=0\Rightarrow a=-2$$

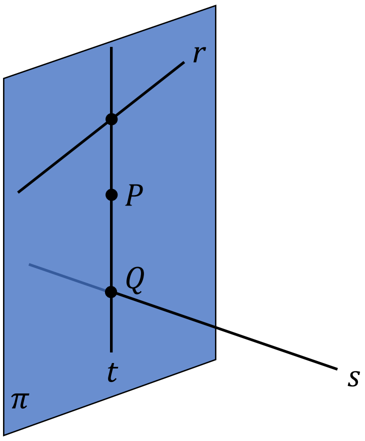
---

[1] $1^{a}f-2\cdot 3^{a}f$.
[2] Desarrollamos el determinante por los elementos de la segunda columna.
[3] $3^{a}c-2^{a}c$.
[4] Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera columna.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P3.
Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3,-2,3)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z+3}{1} \qquad \text{(2,5 puntos)}$$

Como $P \notin r$, ya que no satisface sus ecuaciones, P y r determinan un plano, el plano π:



Como el plano π contiene a la recta r, pertenece al haz de planos de arista la recta r:

$$\pi \equiv \alpha(x+y-z-1)+\beta(x-y+2z+1)=0$$

Y como $P(-3,-2,3)$ está en dicho plano, satisface su ecuación:[1]

$$\alpha(-3-2-3-1)+\beta(-3+2+6+1)=0 \Rightarrow -9\alpha+6\beta=0 \Rightarrow 2\beta=3\alpha \overset{2}{\Rightarrow} \alpha=2, \beta=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x+y-z-1)+3(x-y+2z+1)=0 \Rightarrow \pi \equiv 5x-y+4z+1=0$$

Sea Q el punto de corte de la recta s y el plano π. Por ser Q un punto de la recta s:

$$Q(3-\lambda, -5+2\lambda, -3+\lambda)$$

Y por estar Q en el plano π, satisface su ecuación:

$$5(3-\lambda)-(-5+2\lambda)+4(-3+\lambda)+1=0 \Rightarrow \; 15-5\lambda+5-2\lambda-12+4\lambda+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=3 \Rightarrow Q(0,1,0) \Rightarrow [\overrightarrow{PQ}]=(3,3,-3) \Rightarrow t \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$$

Como la recta t es la recta PQ, no es seguro que corte a la recta r, pues podría ser paralela. Falta probar que no lo es. Para ello multiplicamos escalarmente el vector direccional de la recta t y el vector característico del primer plano de las ecuaciones generales de la recta r:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 3 \neq 0$$

Resulta, pues, que la recta t no es paralela a ese plano y, por tanto, tampoco a la recta r.[3]

---

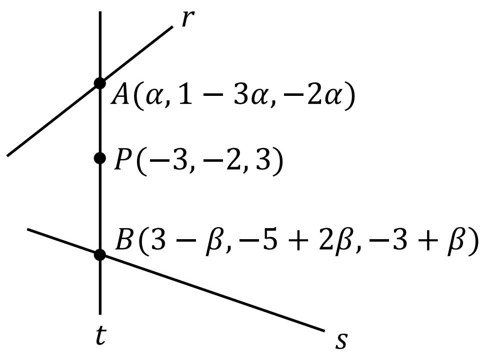
[1] Para otras formas de calcular la ecuación del plano π ver https://youtu.be/AphVHGQcE6s.
[2] Basta calcular una solución particular no nula de esta ecuación.
[3] Para un estudio de los posibles casos que pueden presentarse en un problema de este tipo ver https://youtu.be/FRFBTl8FoT4.

Otra forma de hacer este problema es la siguiente:

Calculamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z-x \\ z=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1-3\alpha \\ z=-2\alpha \end{cases}$$

Por tanto:



Ahora bien, los vectores $[\overrightarrow{PA}]$ y $[\overrightarrow{PB}]$ son colineales. En consecuencia, sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{\alpha+3}{6-\beta}=\frac{3-3\alpha}{2\beta-3}=\frac{-2\alpha-3}{\beta-6} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} 2t-3\alpha+6\beta-9=18-18\alpha-3\beta+3t \\ t-6\alpha+3\beta-18=-12\alpha-18+2t+3\beta \\ 3\beta-18-3t+18\alpha=-4t-6\beta+6\alpha+9 \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 15 & 9 & 27 \\ -1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 9 & 27 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 15 & 9 & 27 \\ 0 & -9 & -9 & -27 \\ 0 & 27 & 18 & 54 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 15 & 9 & 27 \\ 0 & -9 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} t=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=3 \end{cases}$$

Como $\alpha\beta$ es igual a t, el sistema es compatible determinado.[5]

Calculamos ahora el punto A,[6] por ejemplo:

$$\alpha=0 \Rightarrow A(0,1,0) \Rightarrow [\overrightarrow{PA}]=(3,3,-3) \Rightarrow t \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$$

---

[1] Denotamos al producto $\alpha\beta$ con la letra t. Si el siguiente sistema es incompatible, no hay ninguna recta que pase por el punto P y corte a las rectas r y s; si es compatible indeterminado, hay infinitas rectas; y si es compatible determinado, sólo hay una recta.
[2] El orden de las incógnitas es t, α, β. Pasamos todos los términos al primer miembro, excepto los términos independientes que los pasamos al segundo.
[3] $2^{\text{a}}f - 1^{\text{a}}f;\ 3^{\text{a}}f + 1^{\text{a}}f$.
[4] $3^{\text{a}}f + 3 \cdot 2^{\text{a}}f$.
[5] Si t fuese 1, por ejemplo, el sistema sería incompatible, ya que en ese caso $t \neq \alpha\beta$.
[6] Si calculamos el punto B, resulta que coincide con el punto A y, por tanto, las rectas r y s se cortan. Aunque el dibujo no se corresponde con la realidad, el razonamiento que hemos hecho es, evidentemente, correcto.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P4.

Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y a $6u$ de s, siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1} \qquad \text{(2,5 puntos)}$$

Primero obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -7 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -7 \\ 9 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right) \to \begin{cases} 2x - y + 2z = -7 \\ 3x + 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 4 - 3x = -7 \\ 2z = -4 - 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ z = -2 - (3/2)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 3 - 2\alpha \\ z = -2 - 3\alpha \end{cases}$$

Si π es el plano paralelo a las rectas r y s, su vector característico es el producto vectorial de los vectores direccionales de dichas rectas:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} = 2(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

Por tanto, su ecuación es:

$$\pi \equiv x - 2y + 2z + D = 0$$

Ahora bien, si una recta es paralela a un plano, su distancia al plano es la misma que la de uno de sus puntos al plano; y como $A(0,3,-2)$ es un punto de la recta r y $B(1,-3,5)$ es un punto de la recta s:

$$d(A,\pi) = 3 \Rightarrow \frac{|0 - 6 - 4 + D|}{\sqrt{1+4+4}} = 3 \Rightarrow |D - 10| = 9 \Rightarrow D - 10 = \pm 9 \Rightarrow D = 10 \pm 9 \Rightarrow \begin{cases} D = 19 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$d(B,\pi) = 6 \Rightarrow \frac{|1 + 6 + 10 + D|}{\sqrt{1+4+4}} = 6 \Rightarrow |D + 17| = 18 \Rightarrow D + 17 = \pm 18 \Rightarrow D = -17 \pm 18 \Rightarrow \begin{cases} D = 1 \\ D = -35 \end{cases}$$

Por tanto:

$$D = 1 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$$

[1] $2^{\text{a}} f + 2 \cdot 1^{\text{a}} f$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P5.

Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$:

$a)$ $f(x) = \ln[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}]$ (1,25 puntos)

$b)$ $g(x) = \arctan\sqrt{1 + 2x + e^{2x}}$ (1,25 puntos)

$a)$

$$f'(x) = \frac{\left[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}\right]'}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}} = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x) \cdot e^{x^2+2x} + \cos(\pi x)(2x+2)e^{x^2+2x}}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}} = 2(x+1) - \pi \tan(\pi x)$$

$$f'(0) = 2 - \pi \tan 0 = 2 - \pi \cdot 0 = 2.$$

$b)$

$$g'(x) = \frac{\left(\sqrt{1+2x+e^{2x}}\,\right)'}{1 + \left(\sqrt{1+2x+e^{2x}}\,\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1+2x+e^{2x})^{-1/2} \cdot (2+2e^{2x})}{2+2x+e^{2x}} = \frac{1+e^{2x}}{(2+2x+e^{2x}) \cdot \sqrt{1+2x+e^{2x}}}$$

$$g'(0) = \frac{1+e^0}{(2+0+e^0) \cdot \sqrt{1+0+e^0}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P6.

Se considera la función $f(x) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1, 4]$. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1, 4)$ tales que $f(\alpha) = -1/2 = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1,75 puntos)

a) La función f es continua en su dominio y, por tanto, en $[1, 4]$:

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cdot (x-1)\right]}{x^2 - 6x + 10} = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cdot (a-1)\right]}{a^2 - 6a + 10} = f(a)$$

b) Como la función f cumple las condiciones de la propiedad de Darboux en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$, existe $\alpha \in (2, 3)$ y $\beta \in (3, 4)$ tales que $f(\alpha) = -1/2 = f(\beta)$.

En efecto:

1ª) $f(2) > -1/2 > f(3)$ y $f(3) < -1/2 < f(4)$:

$$f(2) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(3) = \frac{\cos\pi}{1} = -1$$

$$f(4) = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

2ª) f es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en $[2, 3]$ y $[3, 4]$.

Propiedad de Darboux:
Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y c está entre $f(a)$ y $f(b)$, existe α en el intervalo (a, b) tal que $f(\alpha) = c$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P7.
Se considera la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{6}}$$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$. (1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7, 11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1,25 puntos)

Derivamos primero la función:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{6}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi x}{6}\right) = \frac{-\dfrac{\pi}{12} \cdot \cos\dfrac{\pi x}{6}}{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{6}}}$$

a) La función f está definida y es derivable (y, por tanto, continua) en el intervalo $[7, 11]$, ya que los radicandos de las funciones f y f' son positivos:

$$7 \le x \le 11 \overset{1}{\Rightarrow} \frac{7\pi}{6} \le \frac{\pi x}{6} \le \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \pi + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi x}{6} \le 2\pi - \frac{\pi}{6} \overset{2}{\Rightarrow} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{6} < 0$$

b) Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [7, 11], existe un valor $\alpha \in (7, 11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

En efecto:

1ª) f es continua en el intervalo cerrado $[7, 11]$ y derivable en el intervalo abierto $(7, 11)$.
2ª) $f(7) = f(11) = 1$:

$$f(7) = \sqrt{\frac{1}{2} - \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$$

$$f(11) = \sqrt{\frac{1}{2} - \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$$

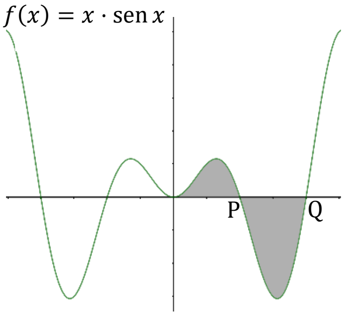
Teorema de Rolle:
Si la función f es continua en el intervalo [a, b], derivable en el intervalo (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe un valor $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

---

[1] Hemos multiplicado por $\pi/6$.
[2] Ya que el ángulo $\pi x/6$ está en el tercer cuadrante o en el cuarto.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P8.

La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$. Tal y como se intuye, la curva corta al eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada. (2,5 puntos)

1º) Hallamos primero los puntos P y Q:

$$x \cdot \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow P(\pi, 0) \text{ y } Q(2\pi, 0) \end{cases}$$

2º) Calculamos el área:

$$A \stackrel{1}{=} \int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx \stackrel{2}{=} [-x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x]_0^{\pi} - [-x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= (-\pi \cdot \cos \pi + \operatorname{sen} \pi) - (-0 \cdot \cos 0 + \operatorname{sen} 0) - [-2\pi \cdot \cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi)] + (-\pi \cdot \cos \pi + \operatorname{sen} \pi) =$$

$$= \pi + 2\pi + \pi = 4\pi$$

Signo	Derivar	Integrar
$+$	x	$\operatorname{sen} x$
$-$	1	$-\cos x$
$+$	0	$-\operatorname{sen} x$

[1] Observemos que $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 0$ son las funciones que definen las regiones sombreadas. De allí el signo negativo de la segunda integral.

[2] La integral indefinida de $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$ la hemos hecho por el método tabular de integración por partes. Para más información sobre este método, https://youtube.com/playlist?list=PLHbcBBQihvslJv25KH1KQEPKY3La1PydS.