EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a-1)y + \left(\sqrt{2}-2\right)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2 z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2-a & \sqrt{2} \end{array}\right) \overset{2}{\to} \begin{cases} 2a+1=0 \Rightarrow a=-1/2 \\ a(2a-1)=0 \Rightarrow a=0, a=1/2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-1/2$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{cases} x-y-z=0 \\ z=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z \\ z=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}+y \\ z=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}+\alpha \\ y=\alpha \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$$

2º) Si $a=0$ o $a=1/2$, el sistema es incompatible, ya que la tercera ecuación es incompatible: $0=\sqrt{2}$.

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}z=2 \\ (2a^2-a)z=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a+1)y = 2-\sqrt{2}z = 2-\frac{2}{2a^2-a} = \frac{4a^2-2a-2}{a(2a-1)} \overset{4}{=} \frac{2(a-1)(2a+1)}{a(2a-1)} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2a-2}{2a^2-a}}$$

$$\Rightarrow x = y+z = \frac{2a-2}{2a^2-a} + \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a}}$$

---

[1] $2^{\text{a}}f - 2\cdot 1^{\text{a}}f; 3^{\text{a}}f + a\cdot 1^{\text{a}}f$.
[2] Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 3º).
[3] $2^{\text{a}}f - \sqrt{2}\cdot 3^{\text{a}}f$.
[4] Descomponemos en factores el numerador.

EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P2.
Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A \cdot B$ sea máxima, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Calculamos primero los determinantes de las matrices A y B:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} \overset{1}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ 0 & t & -2t-1 \end{vmatrix} \overset{3}{=} \begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{4}{=} -2t(t+1)$$

En consecuencia, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = -2t(t+1)$.

Ahora bien,

$$rg(A \cdot B) = 3 \Leftrightarrow |A \cdot B| \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0 \; y \; t \neq -1$$

[1] Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.
[2] $3^a f - 1^a f$.
[3] $3^a f - 2^a f$.
[4] El determinante de una matriz cuadrada triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P3.
Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$$

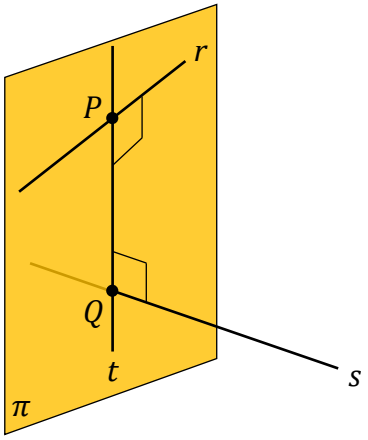
(2,5 puntos)

Primero obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ -2y + 4z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + y + z \\ y = -5 + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 3\alpha \\ y = -5 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Por tanto, la recta r pasa por el punto $A(-7, -5, 0)$, y es paralela al vector $\vec{u}(3, 2, 1)$.

Sea t la perpendicular común a r y s; y π, el plano que definen las rectas secantes r y t:



Como el vector direccional de la recta r, $\vec{u}(3, 2, 1)$, y el vector direccional de la recta s, $\vec{v}(3, -4, -2)$, son perpendiculares a la recta t, su producto vectorial es un vector direccional de dicha recta:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 9\vec{j} - 18\vec{k} = 9(\vec{j} - 2\vec{k})$$

Como el plano π contiene a las rectas r y t, es evidente que pasa por el punto A (que está en la recta r) y es paralelo a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$. Por tanto, su ecuación es:[2]

$$\begin{vmatrix} x+7 & y+5 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5(x+7) + 6(y+5) + 3z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 5x - 6y - 3z + 5 = 0$$

Sea Q el punto de corte de las rectas s y t. Por ser Q un punto de la recta s:

$$Q(2 + 3\lambda, -5 - 4\lambda, -2\lambda)$$

Y por estar Q en el plano π, pues pertenece a la recta t, satisface su ecuación:

$$10 + 15\lambda + 30 + 24\lambda + 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 45\lambda = -45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q(-1, -1, 2) \overset{3}{\Rightarrow} t \equiv \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

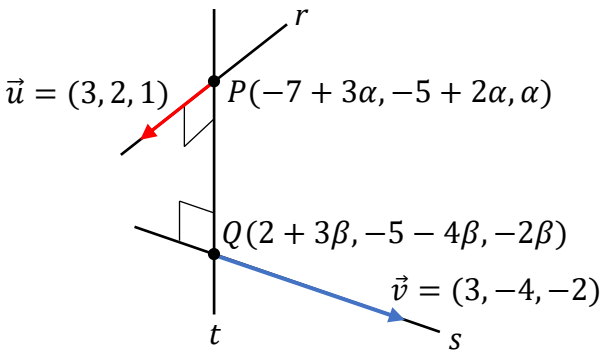
---

[1] $2^{\text{a}} - 1^{\text{a}}$.
[2] Para simplificar los cálculos, hemos sustituido $\vec{w}$ por $\vec{w}/9$.
[3] Es fácil comprobar que el punto Q pertenece también a la recta r, o sea, que coincide con el punto P, esto es, que las rectas r y s se cortan. No obstante, el razonamiento es correcto, aunque el dibujo no responda a la realidad.

Otra forma de hacer el problema es la siguiente:
Igual que antes obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x-y-z+2=0 \\ x-3y+3z-8=0 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ -2y+4z-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+y+z \\ y=-5+2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7+3\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

Por tanto:



Como el vector $[\overrightarrow{PQ}]=(9-3\alpha+3\beta,-2\alpha-4\beta,-\alpha-2\beta)$ es perpendicular[2] a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{cases} [\overrightarrow{PQ}]\cdot\vec{u}=0 \\ [\overrightarrow{PQ}]\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27-9\alpha+9\beta-4\alpha-8\beta-\alpha-2\beta=0 \\ 27-9\alpha+9\beta+8\alpha+16\beta+2\alpha+4\beta=0 \end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 1 & 27 \\ 1 & 29 & -27 \end{array}\right) \overset{4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -405 & 405 \\ 1 & 29 & -27 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -405\beta=405 \\ \alpha+29\beta=-27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(-1,-1,2) \\ P(-1,-1,2) \end{cases}$$

Esto significa que las rectas se cortan en ese punto. Para calcular un vector direccional de la recta t no tenemos más remedio que hacerlo como antes:[5]

$$\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}=9\vec{\jmath}-18\vec{k}=9(\vec{\jmath}-2\vec{k})$$

En consecuencia:

$$t\equiv\frac{x+1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

---

[1] $2^{\text{a}}-1^{\text{a}}$.
[2] Si los puntos P y Q coinciden (que, como veremos, es lo que sucede en este caso), también son nulos los productos escalares que aparecen a continuación, ya que en ese caso el vector $[\overrightarrow{PQ}]=\vec{0}$.
[3] El orden de las incógnitas es α,β. Este sistema es siempre compatible: determinado si las rectas se cortan o se cruzan e indeterminado si las rectas coinciden o son paralelas.
[4] $1^{\text{a}}f-14\cdot 2^{\text{a}}f$.
[5] Si los puntos P y Q no coinciden, la recta PQ queda determinada.

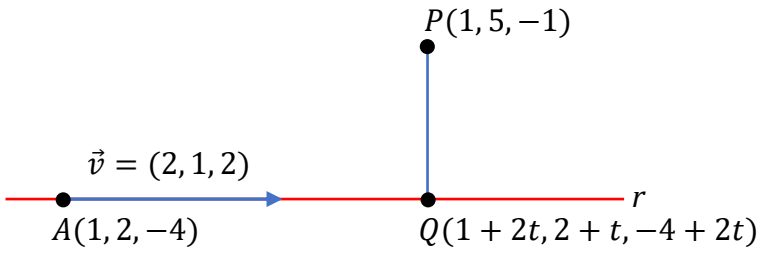
EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P4.

Sean $P(1,5,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P,Q_1) = d(P,Q_2) = 3\sqrt{2}$. (1,25 puntos)

Es fácil ver que el punto de la recta r más próximo al punto P es la proyección ortogonal de P sobre r:



a) Como las rectas PQ y r son perpendiculares, los vectores $[\overrightarrow{PQ}]$ y $\vec{v}$ también y, por tanto, su producto escalar es igual a cero:[1]

$$[\overrightarrow{PQ}] \cdot \vec{v} = (2t, t-3, 2t-3) \cdot (2,1,2) = 4t + t - 3 + 4t - 6 = 9t - 9 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(3,3,-2)$$

b) Si el punto $X \in r \Rightarrow X(1+2t, 2+t, -4+2t)$. Por tanto:

$$d(P,X) = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{4t^2 + (t-3)^2 + (2t-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4t^2 + t^2 - 6t + 9 + 4t^2 - 12t + 9 = 18 \Rightarrow 9t^2 - 18t = 0 \Rightarrow 9t(t-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow Q_1(1,2,-4) = A \\ t = 2 \Rightarrow Q_2(5,4,0) \end{cases}$$

[1] Para otras formas de resolver este apartado ver el problema *A2* de septiembre de 2009.

EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P5.
Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$a)\ \displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}\cdot dx$ (1,25 puntos)

$b)\ \displaystyle\int x\cdot \ln x\cdot dx$ (1,25 puntos)

$a)$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\frac{2x-5}{x^2+x-2}=\frac{2x-5}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{x^2+x-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-5=A(x-1)+B(x+2)\Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=1\Rightarrow -3=3B\Rightarrow B=-1 \\ \text{si } x=-2\Rightarrow -9=-3A\Rightarrow A=3 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx=\int \frac{3}{x+2}\,dx+\int \frac{-1}{x-1}\,dx=3\int \frac{1}{x+2}\,dx-\int \frac{1}{x-1}\,dx=$$

$$=3\ln|x+2|-\ln|x-1|+C$$

$b)$

$$\int x\cdot \ln x\cdot dx \overset{1}{=} \frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$$

Signo	Derivar	Integrar
$+$	$\ln x$	x
$-$	$1/x$	$x^2/2$

[1] Esta integral indefinida la hacemos por el método tabular de integración por partes. Para más información sobre este método, https://youtube.com/playlist?list=PLHbcBBQihvslJv25KH1KQEPKY3La1PydS.

EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P6.
Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} & x < 1 \\ \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

(2,5 puntos)

- La función es continua en $(-\infty, 1)$:

$$\forall a < 1, \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} \overset{1}{=} \frac{\cos^2(\pi a) - 1}{1 - a} = f(a)$$

- La función es continua en $(1, +\infty)$:

$$\forall a > 1, \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [\ln(xe^{x+1}) - 2x] \overset{2}{=} \ln(ae^{a+1}) - 2a = f(a)$$

- La función es continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} \overset{3}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{2 \cdot \cos(\pi x) \cdot [-\operatorname{sen}(\pi x)] \cdot \pi}{-1} = \frac{2 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot \pi}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} [\ln(xe^{x+1}) - 2x] = \ln e^2 - 2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$f(1) = \ln e^2 - 2 = 0$$

[1] Ya que $a \neq 1$.
[2] Ya que a es positivo.
[3] Como aparece la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital.

EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P7.
Se considera la función $f(x) = (x+1)\,\mathrm{sen}(\pi x)$.
a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$. (0,5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha) = 3/4$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Derivamos primero la función:

$$f'(x) = \mathrm{sen}(\pi x) + (x+1)\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi$$

a) Como $Dom(f) = Dom(f') = \mathbb{R}$, la función f es derivable y, por tanto, continua en su dominio.

b) Como la función f cumple las condiciones de la propiedad de Darboux en el intervalo[1] $[0, 1/2]$, existe $\alpha \in (0,1/2) \subset (0,1)$ tal que $f(\alpha) = 3/4$.

En efecto:

1ª) $f(0) < 3/4 < f(1/2)$:

$$f(0) = 1\cdot\mathrm{sen}\,0 = 0$$

$$f(1/2) = \left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

2ª) f es continua en $[0, 1/2]$.

Propiedad de Darboux:
Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y c está entre $f(a)$ y $f(b)$, existe α en el intervalo (a,b) tal que $f(\alpha) = c$.

[1] Como $f(1) = 0$, aplicamos la propiedad de Darboux al intervalo $[0, 1/2]$.

EXAMEN ORDINARIO DE 2023. PROBLEMA P8.
Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad y \quad g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

1º) Hallamos los puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 \neq -2 \end{cases}$$

2º) Averiguamos la posición relativa de ambas gráficas en el intervalo $(-1, 1)$:

x	$f(x)$	$g(x)$
0	2	0

3º) Calculamos el área:[1]

$$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2 - x^4 + x^2) \cdot dx = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^4) \cdot dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{30 - 5 - 3}{15} - \frac{-30 + 5 + 3}{15} =$$

$$= \frac{22}{15} - \frac{-22}{15} = \frac{44}{15}$$

[1] Como el integrando es una función par y el intervalo de integración es simétrico respecto del origen, el área de la región limitada por las dos gráficas es también: $A = 2\int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx$.