EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+(a^2-2a)y-z=-a^2 \\ x+(a^2-4)y+(2a-3)z=-a^2-2a \\ x+(a^2-4a+4)y+(a^2-2a)z=-a^2+a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ 0 & 4-2a & a^2-2a+1 & a-1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & a-2 & a-1 & -a \\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1 \end{array}\right) \overset{4}{\to} \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a^2-1=0 \Rightarrow a=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+3y-z=-1 \\ -3y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1-2z-z=-1 \\ 3y=-1-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3\alpha \\ y=-1/3-(2/3)\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

2º) Si $a=1$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

3º) Si $a=2$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+(a^2-2a)y-z=-a^2 \\ (a-2)y+(a-1)z=-a \\ (a^2-1)z=-a-1 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{-(a+1)}{(a+1)(a-1)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{-1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-2)y=-a-(a-1)z=-a-(a-1)\frac{-1}{a-1}=-a+1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-a+1}{a-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-a^2-a(a-2)\frac{-a+1}{a-2}+\frac{-1}{a-1}=-a^2+a^2-a+\frac{-1}{a-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{-a^2+a-1}{a-1}}$$

---

[1] $2^{\underline{a}}f-1^{\underline{a}}f;\ 3^{\underline{a}}f-1^{\underline{a}}f.$
[2] $3^{\underline{a}}f+2^{\underline{a}}f.$
[3] $2^{\underline{a}}f\cdot 1/2.$
[4] Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
[5] $3^{\underline{a}}f-3\cdot 2^{\underline{a}}f.$

EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P2.
Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}$$ (2,5 puntos)

$$|A^{26}+A^{25}|=|A^{25}\cdot(A+I)|\overset{1}{=}|A^{25}|\cdot|A+I|\overset{1}{=}|A|^{25}\cdot|A+I|=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{vmatrix}^{25}\cdot\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=1^{25}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & t\end{vmatrix}=t+1\overset{2}{=}0\Rightarrow t=-1$$

[1] El determinante de un producto de matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de sus determinantes.
[2] El determinante de una matriz singular es igual a cero.

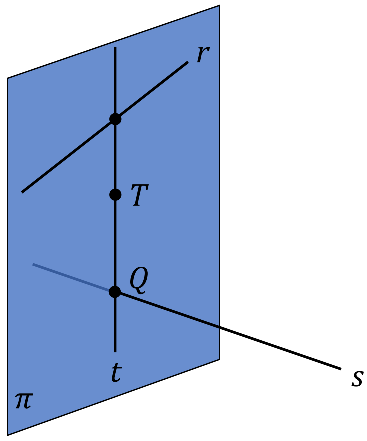
EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P3.

Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $T(1,-5,3)$ y corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

(2,5 puntos)

Sea π el plano que definen las rectas secantes r y t, siendo t la recta que pasa por el punto T y corta a las rectas r y s):



Como el plano π contiene a la recta r, pertenece al haz de planos de arista la recta r:[1]

$$\pi \equiv \alpha(-x-y-z+3)+\beta(3x+z-10)=0$$

Y como $T(1,-5,3)$ está en dicho plano, pues es un punto de la recta t, satisface su ecuación:

$$\alpha(-1+5-3+3)+\beta(3+3-10)=0 \Rightarrow 4\alpha-4\beta=0 \Rightarrow \beta=\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(-x-y-z+3)+\alpha(3x+z-10)=0 \Rightarrow \alpha(-x-y-z+3+3x+z-10)=0 \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x-y-7=0$$

Sea Q el punto de corte de las rectas s y t.

Por ser Q un punto de la recta s:

$$Q(-2\lambda,-1-\lambda,2+\lambda)$$

Y por estar Q en el plano π, pues pertenece a la recta t, satisface su ecuación:[3]

$$-4\lambda+1+\lambda-7=0 \Rightarrow -3\lambda-6=0 \Rightarrow 3\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(4,1,0) \Rightarrow [\overrightarrow{TQ}]=(3,6,-3) \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

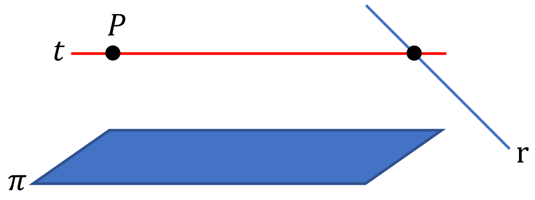
[1] Una simplificación de este procedimiento puede verse en el siguiente vídeo: https://youtu.be/AphVHGQcE6s.
[2] Como α es distinto de 0, podemos dividir por α (si α fuese cero, β también lo sería, lo que no puede ser).
[3] Para otras formas de resolver este problema ver el ejercicio B2 de junio de 2010.

EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P4.

Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(1,2,-1)$, es paralela al plano π y corta a la recta r:

$$\pi \equiv 2x - y + z = 0 \qquad r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(2,5 puntos)}$$

Es fácil ver que el vector direccional del plano π, $\vec{u} = (2,-1,1)$, es perpendicular a la recta t:



También es fácil ver que la recta t está en el plano definido por la recta r y el punto P; y como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r, su ecuación es:

$$\alpha(x - y + 2z + 2) + \beta(3x - y - z - 3) = 0$$

Al ser $P(1,2,-1)$ un punto de este plano, satisface su ecuación:

$$\alpha(1 - 2 - 2 + 2) + \beta(3 - 2 + 1 - 3) = 0 \Rightarrow -\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(x - y + 2z + 2) - \alpha(3x - y - z - 3) = 0 \Rightarrow \alpha(-2x + 3z + 5) = 0 \overset{1}{\Rightarrow} -2x + 3z + 5 = 0$$

Por tanto, el vector $\vec{v} = (-2,0,3)$ es también perpendicular a la recta t. En consecuencia, un vector direccional de esta recta es el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

La ecuación de la recta t es, pues:

$$t \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+1}{2}$$

---

[1] Como α es distinto de 0, podemos dividir por α (si α fuese cero, β también lo sería, lo que no puede ser).

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P5.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{2x\,\sqrt{x-1}} \qquad\qquad \int (3-2x)\,e^{-2x}\,dx$$

(2,5 puntos)

$a)$ Hacemos el cambio de variable $\sqrt{x-1}=t \Rightarrow x-1=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}=\int \frac{2tdt}{2(t^2+1)t}=\int \frac{1}{1+t^2}\cdot dt=arc\,tg\,t+C\overset{1}{=}arc\,tg\,\sqrt{x-1}+C$$

$b)$ Hacemos el cambio de variable $-2x=t \Rightarrow -2dx=dt$:

$$\int (3-2x)e^{-2x}dx=\int (3+t)e^t\left(\frac{dt}{-2}\right)=-\frac{1}{2}\int (3+t)e^t dt\overset{2}{=}-\frac{1}{2}\cdot[(3+t)e^t-e^t+C]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot[(2+t)e^t+C]\overset{1}{=}-\frac{1}{2}\cdot[(2-2x)e^{-2x}+C]=(x-1)e^{-2x}+K$$

Signo	*Derivar*	*Integrar*
$+$	$3+t$	e^t
$-$	1	e^t
$+$	0	e^t

[1] Deshacemos el cambio.

[2] Esta integral indefinida la hacemos por el método tabular de integración por partes. Para más información sobre este método, https://youtube.com/playlist?list=PLHbcBBQihvslJv25KH1KQEPKY3La1PydS.

EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P6.

Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, \pi]$. (0,75 puntos)

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo. (1,75 puntos)

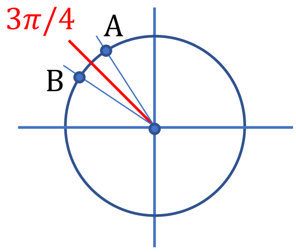
Derivamos primero la función:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\right)' \cdot f(x) = \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} \cdot f(x)$$

a) El único punto del intervalo $[0, \pi]$ en el que las funciones f y f' no están definidas es $x = 3\pi/4$:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/4 + k\pi$$

- La función f es, pues, derivable y, por tanto, continua, en $[0, \pi] - \{3\pi/4\}$.
- En $x = 3\pi/4$ la función f presenta una discontinuidad de salto infinito, pues es fácil ver en la circunferencia unidad que la ordenada del punto A ($\operatorname{sen} x$) es mayor en valor absoluto que su abscisa ($\cos x$), mientras que la ordenada del punto B ($\operatorname{sen} x$) es menor en valor absoluto que su abscisa ($\cos x$); y, por tanto:



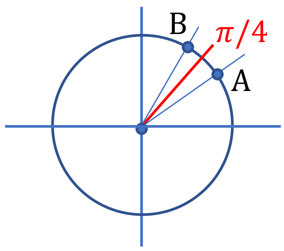
$$\lim_{\substack{x \to 3\pi/4 \\ x < 3\pi/4}} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 3\pi/4 \\ x > 3\pi/4}} f(x) = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

b) Por el criterio de la variación del signo de la primera derivada, la función f tiene un mínimo relativo en $x = \pi/4$ que vale $y = e^{1/\sqrt{2}}$.

En efecto, por la condición necesaria de extremo relativo $x = \pi/4$ es un posible extremo relativo:

$$f'(x) = 0 \overset{1}{\Rightarrow} -\cos x + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4 + k\pi$$

Es fácil ver en la circunferencia unidad que la ordenada del punto A ($\operatorname{sen} x$) es menor que su abscisa ($\cos x$), mientras que la ordenada del punto B ($\operatorname{sen} x$) es mayor que su abscisa ($\cos x$).



Por tanto, el signo de f' a izquierda y derecha de $x = \pi/4$ es:

Por último, $f(\pi/4) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

---

[1] Ya que $f(x)$ es siempre positiva.

EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P7.
Se considera la función:

$$f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2,-1]$. (0,75 punto)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-2,-1)$ tal que $f'(\alpha) = e$. Enuncia los resultados teóricos utilizados, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Derivamos primero la función:

$$f'(x) = \frac{e^{x^2-2} \cdot 2x^2 - e^{x^2-2}}{x^2} = \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2-1)}{x^2}$$

a) Como $Dom(f) = Dom(f') = \mathbb{R} - \{0\}$, la función f es derivable y, por tanto, continua en su dominio. Luego es continua en $[-2,-1]$.

b) Como la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux en $[-2,-1]$, existe $\alpha \in (-2,-1)$ tal que $f'(\alpha) = e$.

En efecto:

1ª) $f'(-1) < e < f'(-2)$:

$$f'(-2) = \frac{7e^2}{4} > e$$

$$f'(-1) = \frac{e^{-1}}{1} = 1/e < e$$

2ª) f' es continua en $[-2,-1]$:

- La función f' está definida en $[-2,-1]$.
- $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = f'(a)\ \forall a \in [-2,-1]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2-1)}{x^2} = \frac{e^{a^2-2} \cdot (2a^2-1)}{a^2} = f'(a)$$

Propiedad de Darboux:
Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y c está entre $f(a)$ y $f(b)$, existe α en el intervalo (a,b) tal que $f(\alpha) = c$.

EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P8.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - |x| \quad y \quad g(x) = x^2 - 10$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

1º) Hallamos los puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - |x| = x^2 - 10 \overset{1}{\Rightarrow} 2 - |x| = |x|^2 - 10 \Rightarrow |x|^2 + |x| - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} |x| = -4 \\ |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

2º) Averiguamos la posición relativa de ambas gráficas en el intervalo $(-3, 3)$:

x	$f(x)$	$g(x)$
0	2	-10

3º) Calculamos el área:

$$A = \int_{-3}^{3} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-3}^{3} (2 - |x| - x^2 + 10) \cdot dx = \int_{-3}^{3} (12 - x^2 - |x|) \cdot dx =$$

$$= \int_{-3}^{3} (12 - x^2) \cdot dx - \int_{-3}^{3} |x| \cdot dx \overset{2}{=} \int_{-3}^{3} (12 - x^2) \cdot dx - \int_{-3}^{0} -x \cdot dx - \int_{0}^{3} x \cdot dx =$$

$$= \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} = \left(36 - \frac{27}{3}\right) - \left(-36 - \frac{-27}{3}\right) + 0 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 27 + 27 - 9 = 45$$

---

[1] Si $|x| = +\sqrt{x^2} \Rightarrow |x|^2 = x^2$.

[2] Si $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, y si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$.