EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}(a^2-1)x+ay+a^2z=1\\(a^2-1)x+(a+1)y+(a^2+a)z=2\\y+(a^2+2a)z=a+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a^2-1 & a & a^2 & 1\\ a^2-1 & a+1 & a^2+a & 2\\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a^2-1 & a & a^2 & 1\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & a^2+2a & a+2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a^2-1 & a & a^2 & 1\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2+a & a+1\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a^2-1=0\Rightarrow a=\pm 1\\ a(a+1)=0\Rightarrow a=0, a=-1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-1$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

2º) Si $a=0$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

3º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}y+z=1\\ z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\ y=0\\ z=1\end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases}(a^2-1)x+ay+a^2z=1\\ y+az=1\\ a(a+1)z=a+1\end{cases}\Rightarrow\boxed{z=\frac{1}{a}}\Rightarrow y=1-az=1-a\frac{1}{a}=1-1=0\Rightarrow\boxed{y=0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a^2-1)x=1-ay-a^2z=1-0-a^2\frac{1}{a}=1-a\Rightarrow x=\frac{-(a-1)}{(a+1)(a-1)}\Rightarrow\boxed{x=\frac{-1}{a+1}}$$

1 $2^{a}f-1^{a}f$.
2 $3^{a}f-2^{a}f$.
3 Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
4 $2^{a}f+1^{a}f$.
5 $2^{a}f-1^{a}f; 3^{a}f\cdot 1/2$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P2.

Demuestra que se cumple $|A \cdot B| = 0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo B la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(2,5 puntos)}$$

$$|A \cdot B| = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a & b & a+2b \\ c & d & c+2d \\ e & f & e+2f \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & 2b \\ c & d & 2d \\ e & f & 2f \end{vmatrix} \overset{1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & d & d \\ e & f & f \end{vmatrix} \overset{2}{=} 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

---

[1] Por las propiedades de los determinantes.

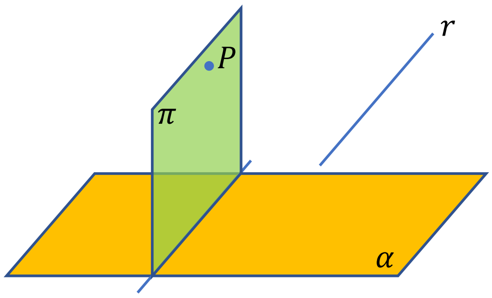
[2] Un determinante con dos columnas iguales vale 0.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P3.
Calcula la ecuación general del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 2x - y - z - 1 = 0$, sabiendo que contiene al punto $P(-1, 2, 1)$ y que la intersección de ambos planos es paralela a la siguiente recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$ (2,5 puntos)

Primero obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z + 3 - 2z - 3 = 0 \\ y = z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$



Como la recta r es paralela al plano π,[1] su vector direccional, $\vec{u} = (1, 1, 1)$, es paralelo al plano π; y como este plano es perpendicular al plano α, el vector característico de α, el vector $\vec{v} = (2, -1, -1)$, también es paralelo al plano π. Por tanto, al ser $P(-1, 2, 1)$ un punto del plano π, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0(x+1) + 3(y-2) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow 3(y - 2 - z + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv y - z - 1 = 0$$

[1] Ya que es paralela a la recta intersección de los planos π y α, que, evidentemente, es una recta que está en el plano π.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P4.
Encuentra los puntos de la recta r que son centro de una esfera de radio 3 tangente al plano π:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0 \qquad \text{(2,5 puntos)}$$

Primero obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + z - y + 3z = 8 \\ x = -1 + z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9 + 4z = y \\ x = -1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -9 + 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Si el punto X es el centro de la esfera, como está en la recta r, $X(-1 + \alpha, -9 + 4\alpha, \alpha)$.
Y al ser el plano π tangente a la esfera de centro el punto X, su distancia a dicho punto es igual al radio de la esfera:

$$d(X, \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|2(-1 + \alpha) + 2(-9 + 4\alpha) - \alpha - 7|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3 \Rightarrow |9\alpha - 27| = 9 \Rightarrow |\alpha - 3| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = 1 \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow X(3, 7, 4) \\ \alpha - 3 = -1 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow X(1, -1, 2) \end{cases}$$

[1] $2^{a} f - 1^{a} f$.

EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P5.
Sea la función

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{1}{x}\right)$$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1/e, e]$. (0,75 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (1/e, e)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{e\sqrt{2}}{1-e^2}$. Enuncia los resultados teóricos utilizados, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Derivamos primero la función:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{1}{x}\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(1/x)'}{1/x} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-1/x^2}{1/x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{4x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{1}{x}\right)$$

a) Como $Dom(f) = Dom(f') = (0, +\infty)$, la función f es derivable y, por tanto, continua en su dominio. Luego es continua en el intervalo $[1/e, e]$.

b) Como la función f cumple las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[1/e, e]$, existe un valor $\alpha \in (1/e, e)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1/e)}{e - 1/e} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln \frac{1}{e}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot \ln e\right)}{(e^2 - 1)/e} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot [\ln 1 - \ln e]\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{(e^2 - 1)/e} \stackrel{1}{=}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{(e^2 - 1)/e} = \frac{-2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{(e^2 - 1)/e} = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{(e^2 - 1)/e} \stackrel{2}{=} \frac{-\sqrt{2} \cdot e}{e^2 - 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot e}{1 - e^2}$$

En efecto:

1ª) La función f es continua en el intervalo $[1/e, e]$.

2ª) La función f es derivable en $(1/e, e)$ por serlo en su dominio.

Teorema de Lagrange:
Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

[1] Dos ángulos opuestos tienen los senos opuestos.
[2] Multiplicamos numerador y denominador por e.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P6.
Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} \qquad \text{(1,25 puntos)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(x+1)-x} \qquad \text{(1,25 puntos)}$$

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}\right)^{2x-1} \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{(2x-1)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+x-1}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{(2x-1)\cdot\left(\frac{x^2-x^2-x+1}{x^2+x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{(2x-1)\cdot\frac{-x+1}{x^2+x-1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x-1}} \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-2+3/x-1/x^2}{1+1/x-1/x^2}} = e^{-2}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(x+1)-x} \overset{3}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)e^x}{\frac{1}{x+1}-1} \overset{4}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)e^x(x+1)}{1-x-1} \overset{5}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[2e^x(x+1)\frac{e^x-1}{-x}\right] \overset{6}{=} 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{-x} \overset{3}{=} 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{-1} = 2\cdot(-1) = -2$$

[1] Se trata de una indeterminación del tipo 1^{∞}.
[2] En el exponente, dividimos numerador y denominador por x^2.
[3] Como aparece la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital.
[4] Multiplicamos numerador y denominador por $x+1$.
[5] Para evitar demasiados cálculos, "separamos" los factores que no tienden a cero.
[6] El límite de un producto es el producto de los límites de los factores.

EXAMEN ORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P7.
Sea la función

$$f(x) = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right)$$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[2,4]$. (1 punto)

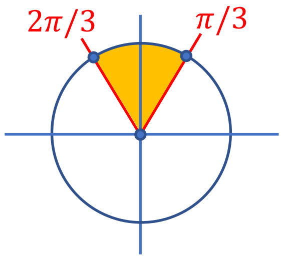
b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (2,4)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos utilizados, y justifica su uso. (1,5 puntos)

a) La función es continua en el intervalo $[2,4]$.

En efecto:

- La función f está definida en el intervalo $[2,4]$:

$$2 \leq x \leq 4 \overset{1}{\Rightarrow} \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$$



Es fácil ver en la circunferencia unidad que si el ángulo $\pi x/6$ está entre $\pi/3$ y $\pi/2$, su seno es mayor que su coseno; y si está entre $\pi/2$ y $2\pi/3$ su coseno es negativo. Por tanto, el argumento del logaritmo es positivo en el intervalo $[2,4]$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\ \forall a \in [2,4]$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{6} - \cos\frac{\pi x}{6}\right) = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi a}{6} - \cos\frac{\pi a}{6}\right) = f(a)$$

b) Como la función f satisface las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo [2, 4], existe un valor $\alpha \in (2,4)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

En efecto:

1ª) $f(2) \cdot f(4) < 0$:

$$f(2) = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{6}\right) = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{\sqrt{3}-1}{2} \overset{2}{<} 0$$

$$f(4) = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{4\pi}{6} - \cos\frac{4\pi}{6}\right) = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{\sqrt{3}+1}{2} \overset{3}{>} 0$$

2ª) f es continua en el intervalo $[2,4]$.

Teorema de Bolzano:
Si la función f es continua en el intervalo [a, b] y tiene signos distintos en los extremos de ese intervalo, existe un valor $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

---

[1] Hemos multiplicado por $\pi/6$.
[2] Ya que $(\sqrt{3}-1)/2 < 1$.
[3] Ya que $(\sqrt{3}+1)/2 > 1$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2022. PROBLEMA P8.
Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \qquad\qquad g(x) = x - 2 \qquad\qquad \text{(2,5 puntos)}$$

1º) Hallamos primero los puntos de corte de las dos gráficas:

$$x^3 - 3x - 2 = x - 2 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \pm 2 \end{cases}$$

2º) Averiguamos la posición relativa de ambas gráficas en los intervalos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$:

x	$f(x)$	$g(x)$
-1	0	-3
1	-4	-1

3º) Calculamos el área:

$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x) \cdot dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 0 - \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{2}\right) + \left(\frac{16}{2} - \frac{16}{4}\right) - 0 = 4 + 4 = 8$$