EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax + (a-2)y = a-2 \\ ax + (a^2-2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2-4)y + z = 4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 1 & a+2 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{array}\right) \overset{3}{\to}$$

$$\to \begin{cases} a = 0 \\ a^2-3a+2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a = 0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

2º) Si $a = 1$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{8}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) Si $a = 2$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{8}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} ax + (a-2)y = a-2 \\ (a-1)(a-2)y + 2z = 2 \Rightarrow \boxed{z = -a} \Rightarrow (a-1)(a-2)y = 2 - 2z = 2 + 2a = 2(a+1) \Rightarrow \\ -z = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}} \Rightarrow ax = a - 2 - (a-2)y = a - 2 - \frac{2(a+1)}{a-1} = \frac{a^2 - a - 2a + 2 - 2a - 2}{a-1} =$$

$$= \frac{a^2 - 5a}{a-1} = \frac{a(a-5)}{a-1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a-5}{a-1}}$$

---

[1] $2^{\text{a}}f - 1^{\text{a}}f$; $3^{\text{a}}f - 3 \cdot 1^{\text{a}}f$.
[2] $3^{\text{a}}f - 2^{\text{a}}f$.
[3] Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
[4] $1^{\text{a}}f \cdot (-1/2)$; $2f^{\text{a}} \cdot 1/2$; $3^{\text{a}}f \cdot (-1)$.
[5] $2^{\text{a}}f - 1^{\text{a}}f$.
[6] $3^{\text{a}}f - 2^{\text{a}}f$.
[7] $2^{\text{a}}f \cdot 1/2$.
[8] $3^{\text{a}}f + 2^{\text{a}}f$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P2.
Calcula los valores de t para que se cumpla la condición $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

$$|A \cdot B^{-1}| \overset{1}{=} |A| \cdot |B^{-1}| \overset{2}{=} |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 1 \Rightarrow |A| = |B|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \overset{3}{=} \begin{vmatrix} t+1 & t & -t \\ t-1 & t-1 & t \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \overset{4}{=} (t-2)\begin{vmatrix} t+1 & t \\ t-1 & t-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2)(t^2-1-t^2+t) = (t-2)(t-1)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{5}{=} \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -t \\ 1-2t & 2t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{4}{=} \begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ 1-2t & 2t-1 \end{vmatrix} = (t-1)(2t-1)$$

Por tanto:

$$(t-2)(t-1) = (t-1)(2t-1) \Rightarrow (t-1)(t-2-2t+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-1)(-t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Ahora bien, si t=1, el determinante de B es igual a 0; y, por tanto, no existe la inversa de B. La solución es, pues, $t = -1$.

---

[1] El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de sus determinantes.
[2] Como $B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \Rightarrow |B^{-1}| = 1/|B|$.
[3] $1^a c - 3^a c$.
[4] Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera fila.
[5] $2^a c + 3^a c$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P3.
Calcula la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$$

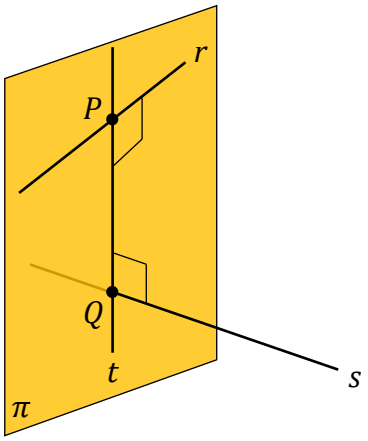
(2,5 puntos)

Primero obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases}$$

Por tanto, la recta r pasa por el origen de coordenadas, $O(0,0,0)$, y es paralela al vector $\vec{u}(-1,1,-2)$.

Sea t la perpendicular común a r y s; y π, el plano que definen las rectas secantes r y t:



Como el vector direccional de la recta r, $\vec{u}(-1,1,-2)$, y el vector direccional de la recta s, $\vec{v}(-1,5,2)$, son perpendiculares a la recta t, su producto vectorial es un vector direccional de dicha recta:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 12\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 4\vec{k} = 4(3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})$$

Como el plano π contiene a las rectas r y t, es evidente que pasa por el origen de coordenadas (que está en la recta r) y es paralelo a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$. Por tanto, su ecuación es:[1]

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 7y - 4z = 0$$

Sea Q el punto de corte de las rectas s y t. Por ser Q un punto de la recta s:

$$Q(6-\lambda, 6+5\lambda, 2+2\lambda)$$

Y por estar Q en el plano π, pues pertenece a la recta t, satisface su ecuación:

$$6 - \lambda - 7(6+5\lambda) - 4(2+2\lambda) = 0 \Rightarrow 6 - \lambda - 42 - 35\lambda - 8 - 8\lambda = 0 \Rightarrow 44\lambda = -44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q(7,1,0) \Rightarrow t \equiv \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$$

[1] Para simplificar los cálculos, hemos sustituido $\vec{w}$ por $\vec{w}/4$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P4.
Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a la recta r. (2,5 puntos)

a) Ecuación del plano:

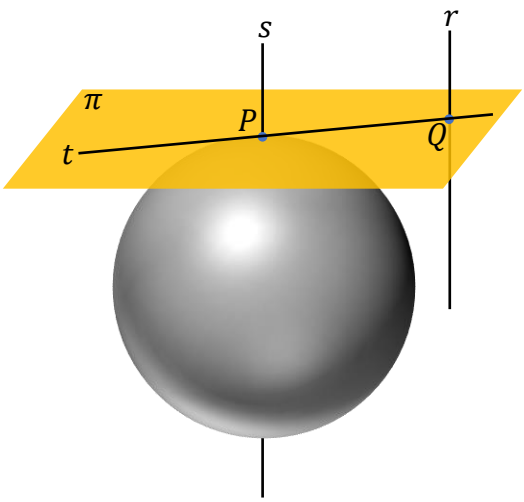
Si el plano π corta perpendicularmente a la recta r, el vector direccional de la recta es un vector característico del plano. Por tanto, la ecuación de éste es:

$$\pi \equiv 2x + y - 2z + D = 0$$

Como el plano es tangente a la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 3, su distancia al origen es igual al radio de la esfera:

$$d(O,\pi) = 3 \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 \Rightarrow |D| = 9 \Rightarrow \begin{cases} D = 9 \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0 \\ D = -9 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

El problema tiene, pues, dos soluciones. Como piden sólo una, nos quedamos con la primera.



b) Punto de tangencia:

La recta s que pasa por el centro de la esfera, o sea, por el origen de coordenadas, y es paralela a la recta r tiene por ecuación:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

Por tanto, el punto P, el punto de corte del plano π con la recta s, que es el punto de tangencia de la esfera y el plano, tiene por coordenadas:

$$P(2\alpha, \alpha, -2\alpha)$$

Y como está en el plano π_1, satisface su ecuación:

$$4\alpha + \alpha + 4\alpha + 9 = 0 \Rightarrow 9\alpha = -9 \Rightarrow \alpha = -1$$

Por tanto:

$$P(-2,-1,2)$$

c) Ecuación de la recta t:

Sea Q el punto de corte de la recta r y el plano π_1. Como Q está en esa recta, sus coordenadas son:

$$Q(3+2\beta, 4+\beta, -4-2\beta)$$

Y como está en el plano π_1, satisface su ecuación:

$$2(3+2\beta) + 4 + \beta - 2(-4-2\beta) + 9 = 0 \Rightarrow 6 + 4\beta + 4 + \beta + 8 + 4\beta + 9 = 0 \Rightarrow 9\beta = -27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = -3 \Rightarrow Q(-3,1,2) \Rightarrow [\overrightarrow{PQ}] = (-1,2,0) \Rightarrow s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P5.
Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}} \qquad \text{(1,25 puntos)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(1,25 puntos)}$$

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}} \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}\right)\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^4+2x^3}+\sqrt{3x^4}}{3x^3+2x^2-3x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}\right)}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

De otra forma:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{3}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

[1] Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.
[2] Como aparece la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital.
[3] Hacemos el cambio de variable $1/x = t$.

EXAMEN ESTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P6.
Se considera la función

$$f(x) = \log_2\left[\operatorname{sen}\frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{(x-5)/2}\right]$$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos utilizados, y justifica su uso. (1,5 puntos)

a) La función es continua en el intervalo $[6, 7]$.

En efecto:

- La función f está definida en el intervalo $[6, 7]$, ya que el argumento del logaritmo es positivo en él:

$$6 \le x \le 7 \Rightarrow 1 \le x - 5 \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{x-5}{2} \le 1 \overset{1}{\Rightarrow} 2^{1/2} \le 2^{(x-5)/2} \le 2^1 \Rightarrow \sqrt{2} \le 2^{(x-5)/2} \le 2 \overset{2}{=}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} - 1 \le \operatorname{sen}\frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{(x-5)/2} \le 3$$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\ \forall a \in [6, 7]$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \log_2\left[\operatorname{sen}\frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{(x-5)/2}\right] = \log_2\left[\operatorname{sen}\frac{\pi(a+1)}{4} + 2^{(a-5)/2}\right] = f(a)$$

b) Como la función f satisface las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[6, 7]$, existe un valor $\alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

En efecto:

1ª) $f(6) \cdot f(7) < 0$:

$$f(6) = \log_2\left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} + 2^{1/2}\right) = \log_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) = \log_2\frac{-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \log_2\frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 2^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(7) = \log_2[\operatorname{sen}(2\pi) + 2] = \log_2 2 = 1 > 0$$

2ª) f es continua en el intervalo $[6, 7]$.

Teorema de Bolzano:
Si la función f es continua en el intervalo [a, b] y tiene signos distintos en los extremos de ese intervalo, existe un valor $\alpha \in (a, b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

---

[1] Ya que la función exponencial de base 2 es creciente.
[2] Ya que $-1 \le \operatorname{sen}[\pi(x+1)/4] \le 1$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P7.
Se considera la función

$$f(x) = \sqrt{x + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}$$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$. (0,75 punto)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1, 2)$ y $\beta \in (2, 3)$ tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia los resultados teóricos utilizados, y justifica su uso. (1,75 puntos)

a) La función es continua en $[1, 3]$.

En efecto:

- La función f está definida en el intervalo $[1, 3]$, ya que el radicando no es negativo en él:

$$1 \leq x \leq 3 \overset{1}{\Rightarrow} 0 \leq x + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} \leq 4$$

- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\ \forall a \in [1, 3]$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{x + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}} = \sqrt{a + \operatorname{sen}\frac{\pi a}{2}} = f(a)$$

b) La función f' está definida en el intervalo $(1, 3)$, ya que en ese intervalo el radicando es positivo:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}}{2\sqrt{x + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}}$$

$$1 < x < 3 \overset{1}{\Rightarrow} 0 < x + \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} < 4$$

Como f satisface las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos $[1, 2]$ y $[2, 3]$, existen $\alpha \in (1, 2)$ y $\beta \in (2, 3)$ tales que $f'(\alpha) = 0$ y $f'(\beta) = 0$.

En efecto:

1ª) f es continua en $[1, 2]$ y en $[2, 3]$ por serlo en $[1, 3]$.

2ª) f es derivable en $(1, 2)$ y en $(2, 3)$ por serlo en $(1, 3)$.

3ª) $f(1) = f(2)\ y\ f(2) = f(3)$:

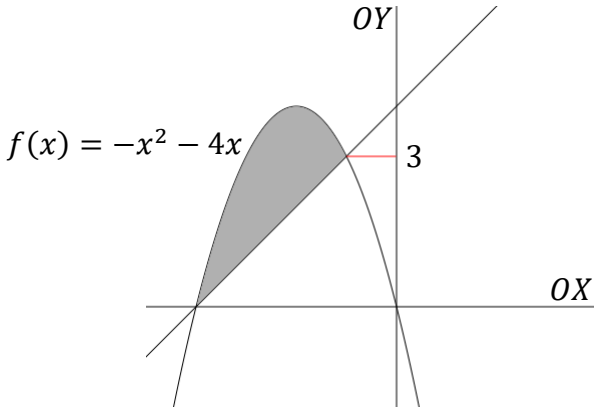
$$f(1) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}(\pi/2)} = \sqrt{2}, f(2) = \sqrt{2 + \operatorname{sen}\pi} = \sqrt{2} \text{ y } f(3) = \sqrt{3 + \sin(3\pi/2)} = \sqrt{2}$$

Teorema de Rolle:
Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

[1] Ya que $-1 \leq \operatorname{sen}(\pi x/2) \leq 1$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2021. PROBLEMA P8.

Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada:



(2,5 puntos)

a) Hallamos primero los puntos de corte de la recta y la parábola:

$$-x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \Rightarrow A(-4,0) \end{cases}$$

$$f(x) = 3 \Rightarrow -x^2 - 4x = 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \Rightarrow B(-1,3) \end{cases}$$

b) Calculamos la ecuación de la recta AB:

$$[\overrightarrow{AB}] = (3,3) = 3(1,1) \Rightarrow AB \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = x + 4$$

c) Calculamos el área de la región señalada:

$$S = \int_{-4}^{-1} [(-x^2 - 4x) - (x+4)] \cdot dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2 - 5x - 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x \right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) - \left(\frac{64}{3} - 40 + 16 \right) = \frac{2 - 15 + 24}{6} - \frac{64 - 72}{3} = \frac{11}{6} + \frac{8}{3} = \frac{11 + 16}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$