EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a+1)x+(a^2+a)y=2\\(-a-1)x-a^2y=0\\ay+(a^2-1)z=3-a\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a+1 & a^2+a & 0 & 2\\-a-1 & -a^2 & 0 & 0\\0 & a & a^2-1 & 3-a\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a+1 & a^2+a & 0 & 2\\0 & a & 0 & 2\\0 & a & a^2-1 & 3-a\end{array}\right)\overset{2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}{\color{red}a+1} & a^2+a & 0 & 2\\0 & {\color{red}a} & 0 & 2\\0 & 0 & {\color{red}a^2-1} & 1-a\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}\begin{cases}a+1=0\Rightarrow a=-1\\a=0\\a^2-1=0\Rightarrow a=\pm1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-1$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 2\\0 & -1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

2º) Si $a=0$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$

2º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}2x+2y=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\\z=\alpha\end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases}(a+1)x+a(a+1)y=2\\ay=2\\(a+1)(a-1)z=1-a\end{cases}\Rightarrow z=\frac{-(a-1)}{(a+1)(a-1)}\Rightarrow\boxed{z=\frac{-1}{a+1}}\Rightarrow\boxed{y=\frac{2}{a}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a+1)x=2-a(a+1)\frac{2}{a}=2-2a-2=-2a\Rightarrow\boxed{x=\frac{-2a}{a+1}}$$

---

1 $2^a f+1^a f$.
2 $3^a f-2^a f$.
3 Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

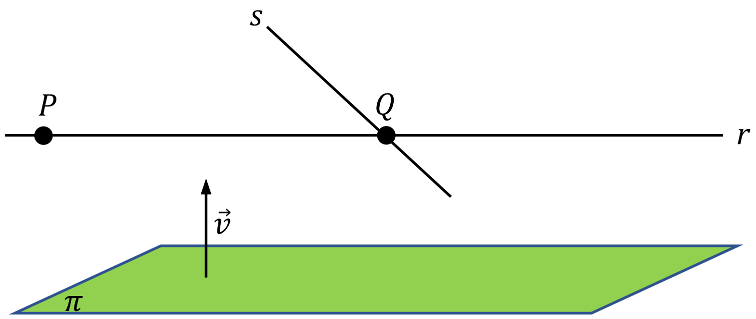
EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P2.

Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta s, es paralela al plano π y pasa por el punto $P(-1,3,1)$:

$$s \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$$

(2,5 puntos)

Un esquema puede ayudarnos a resolver el problema:



Calculamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3x + y - 7 \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2 + 2x \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 5 - \alpha \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases}$$

Como el punto Q está en la recta s, $Q(\alpha, 5 - \alpha, -2 + 2\alpha)$.

Como los puntos P y Q están en la recta r, $[\overrightarrow{PQ}] = (\alpha + 1, 2 - \alpha, -3 + 2\alpha)$ es un vector direccional de r.

Y como la recta r es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$, su vector direccional, el vector $[\overrightarrow{PQ}]$, es perpendicular al vector característico del plano π, el vector $\vec{v} = (2, -1, 3)$:

$$2(\alpha + 1) - (2 - \alpha) + 3(-3 + 2\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha + 2 - 2 + \alpha - 9 + 6\alpha = 0 \Rightarrow 9\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = 1$$

Por tanto, $[\overrightarrow{PQ}] = (2, 1, -1)$.

Como la recta r pasa por el punto P, su ecuación continua es:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P3.
Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)$$

(2,5 puntos)

$a)$

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} \overset{1}{=} \lim_{x\to 1} e^{\left[\frac{1}{x^2-x}\cdot\left(1+\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2}\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x}} =$$

$$\overset{2}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\frac{3\pi x}{2}}{2x-1}} = e^{\frac{0}{1}} = e^{0} = 1$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right) \overset{3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^2+1-x^4+7}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{8-x^2}{\sqrt{x^4\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}+\sqrt{x^4\left(1-\frac{7}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{8}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{7}{x^4}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{8}{x^2}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{7}{x^4}}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

---

[1] Se trata de una indeterminación del tipo 1^{∞}.
[2] Como es una indeterminación del tipo $0/0$, aplicamos la regla de L'Hôpital.
[3] Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P4.

Sea la función $f(x)=\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right)^{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [1, 2]. (0,75 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (1,75 puntos)

a) La función f es continua en [1,2]:

$$1\le x\le 2\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi x}{2}\le\pi\overset{1}{\Rightarrow}0\le\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\le 1\Rightarrow 1\le 1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\le 2\overset{2}{\Rightarrow}[1,2]\subset Dom(f)$$

Por tanto:[3]

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right)^{x}=\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi a}{2}\right)^{a}=f(a)\quad\forall a\in[1,2]$$

b) Derivamos la función por el método de derivación logarítmica:

$$f(x)=\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right)^{x}\Rightarrow \ln f(x)=x\cdot\ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right)+x\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right)^{x}\cdot\left[\ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}\right]\Rightarrow[1,2]\subset Dom(f')$$

Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo cerrado $[1,2]$, existe α en el intervalo abierto $(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) La función f' es continua en el intervalo cerrado $[1,2]$:

$$\lim_{x\to a}f'(x)\overset{2}{=}f'(a)\ \ \forall a\in[1,2]$$

2ª) $f'(1)\cdot f'(2)<0$:

- $f'(1)=2\cdot ln\,2>0$
- $f'(2)=\pi\cdot(-1)=-\pi<0$

Teorema de Bolzano:
Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)\cdot f(b)<0$, entonces existe c en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(c)=0$.

---

[1] Ya que el ángulo $\pi x/2$ está en el segundo cuadrante.

[2] Ya que $1+\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}>0\ \forall x\in[1,2]$.

[3] Se puede sustituir el siguiente límite indicando que la función es continua en $[1,2]$ por ser derivable en dicho intervalo, como se demuestra a continuación.

EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P5.
Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = |B| = 1/2$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2$$

(2,5 puntos)

$$|C| = |(2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2| \overset{1}{=} |2 \cdot A^t \cdot B^{-1}|^2 \overset{1}{=} (|2 \cdot A^t| \cdot |B^{-1}|)^2 \overset{2}{=} (8 \cdot |A^t| \cdot |B^{-1}|)^2 \overset{3}{=}$$

$$= \left(8 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|B|}\right)^2 = \left(8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/2}\right)^2 = 8^2 = 64$$

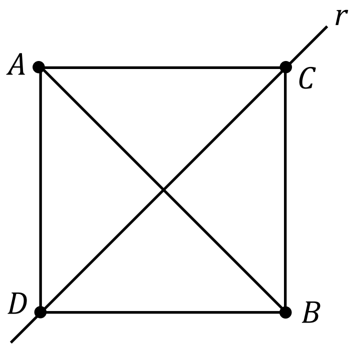
[1] El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes.
[2] Ya que la matriz $2 \cdot A^t$ es de orden 3.
[3] Una matriz cuadrada y su traspuesta tienen el mismo determinante. Una matriz invertible y su inversa tienen determinantes inversos.

EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P6.
Los puntos $A(-1,2,1)$ y $B(2,5,1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$ (2,5 puntos)

Los puntos A y B son vértices opuestos del cuadrado, ya que el vector $[\overrightarrow{AB}] = (3,3,0)$ es perpendicular al vector $\vec{v} = (-1,1,-4)$, vector direccional de la recta r (que es donde están los otros dos vértices):

$$[\overrightarrow{AB}] \cdot \vec{v} = -3 + 3 = 0$$



Calculamos la longitud de la diagonal del cuadrado y la de su lado:

$$AB = \left|[\overrightarrow{AB}]\right| = \sqrt{3^2+3^2+0^2} = \sqrt{18} \overset{1}{\Rightarrow} 18 = 2 \cdot BC^2 \Rightarrow BC = 3$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4+\alpha \\ z = -1-4\alpha \end{cases}$$

Si X es un punto de la recta r:

$$X(-\alpha, 4+\alpha, -1-4\alpha)$$

Queremos calcular los puntos X de la recta r que distan 3 unidades del punto B:

$$d(B,X) = 3 \Rightarrow \sqrt{(2+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2 + (2+4\alpha)^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + \alpha^2 + 4\alpha + 1 + \alpha^2 - 2\alpha + 4 + 16\alpha^2 + 16\alpha = 9 \Rightarrow 18\alpha^2 + 18\alpha = 0 \Rightarrow 18\alpha(\alpha+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow X(0,4,-1) \\ \alpha = -1 \Rightarrow X(1,3,3) \end{cases}$$

Por tanto, $C(0,4,-1)$ y $D(1,3,3)$.

---

[1] Por el teorema de Pitágoras.

EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P7.
Sea la función $f(x) = (x+3)^{\text{sen}(\pi x)} \cdot \ln(x^2 - x + 2)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 0]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = -\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (1,5 puntos)

a) La función f es continua en $[-1,0]$:

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \overset{1}{\Rightarrow} x^2 - x + 2 > 0 \overset{2}{\Rightarrow} Dom(f) = (-3, +\infty)$$

Por tanto: [3]

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[(x+3)^{\text{sen}(\pi x)} \cdot \ln(x^2 - x + 2)\right] =$$

$$= (a+3)^{\text{sen}(\pi a)} \cdot \ln(a^2 - a + 2) = f(a) \quad \forall a \in [-1, 0] \subset (-3, +\infty)$$

b) Derivamos la función por el método de derivación logarítmica:

$$f(x) = (x+3)^{\text{sen}(\pi x)} \cdot \ln(x^2 - x + 2) \Rightarrow \ln f(x) = \text{sen}(\pi x) \cdot \ln(x+3) + \ln\ln(x^2 - x + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot \ln(x+3) + \text{sen}(\pi x) \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{\frac{2x-1}{x^2-x+2}}{\ln(x^2-x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \left[\pi \cdot \cos(\pi x) \cdot \ln(x+3) + \frac{\text{sen}(\pi x)}{x+3} + \frac{2x-1}{(x^2-x+2) \cdot \ln(x^2-x+2)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dom(f') = Dom(f) = (-3, +\infty)$$

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo cerrado $[-1, 0]$, existe α en el intervalo abierto $(-1, 0)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{3^0 \cdot \ln 2 - 2^0 \cdot \ln 4}{1} = \ln 2 - 2 \cdot \ln 2 = -\ln 2$$

En efecto:

1ª) La función f es continua en el intervalo cerrado $[-1, 0]$ por ser derivable en su dominio.

2ª) La función f es derivable en el intervalo abierto $(-1, 0)$ por ser derivable en su dominio.

Teorema de Lagrange:
Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), existe c en el intervalo abierto (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

---

[1] Ya que $0^2 - 0 + 2 = 2 > 0$.
[2] Ya que $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$.
[3] Se puede sustituir el siguiente límite indicando que la función es continua en $[-1, 0]$ por ser derivable en dicho intervalo, como se demuestra a continuación.

EXAMEN ORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P8.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \text{sen}(\pi x) \qquad\qquad g(x) = |x^2 - x|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

1º) Hallamos primero los puntos de corte de ambas gráficas:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \text{sen}(\pi x) = |x^2 - x| \overset{[1]}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos la posición relativa de ambas gráficas en el intervalo $(0, 1)$:

x	$f(x)$	$g(x)$
$1/2$	1	$1/4$

3º) Calculamos el área. Aunque antes vamos a estudiar el signo del polinomio $x^2 - x = x \cdot (x - 1)$:

$+$		$-$		$+$
	0		1	

Por tanto, en el intervalo $[0, 1]$, $g(x) = -(x^2 - x) = x - x^2$.

En consecuencia:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^1 [\text{sen}(\pi x) - (x - x^2)] \cdot dx = \int_0^1 [x^2 - x + \text{sen}(\pi x)] \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x)\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} = \frac{2\pi - 3\pi + 12}{6\pi} = \frac{12 - \pi}{6\pi}$$

[1] Se calculan a ojo.