EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a^2-2)x+2y+z=a+2\\(a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6\\(a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2}\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a^2-2 & 2 & 1 & a+2\\ a^2-2 & 4 & a+1 & a+6\\ a^2-2 & 2 & 2-a & a+\sqrt{2}\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a^2-2 & 2 & 1 & a+2\\ 0 & 2 & a & 4\\ 0 & 0 & 1-a & \sqrt{2}-2\end{array}\right)\overset{2}{\rightarrow}\begin{cases}a^2-2=0\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}\\ 1-a=0\Rightarrow a=1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-\sqrt{2}$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2-\sqrt{2}\\ 0 & 2 & -\sqrt{2} & 4\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} & \sqrt{2}-2\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} & \sqrt{2}-2\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2}\end{array}\right)$$

2º) Si $a=1$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}-2\end{array}\right)$$

3º) Si $a=\sqrt{2}$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 4\\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & \sqrt{2}-2\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & \sqrt{2}-2\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}2y+z=2+\sqrt{2}\\(\sqrt{2}-1)z=2-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow z=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{1}=2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}=\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=2+\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\Rightarrow y=1\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=1\\z=\sqrt{2}\end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases}(a^2-2)x+2y+z=a+2\\2y+az=4\\(1-a)z=\sqrt{2}-2\end{cases}\Rightarrow\boxed{z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}}\Rightarrow 2y=4-\frac{(\sqrt{2}-2)a}{1-a}=\frac{4-4a-\sqrt{2}a+2a}{1-a}\Rightarrow$$

---

[1] 2ªf − 1ªf; 3ªf − 1ªf.
[2] Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
[3] 2ªf − 1ªf.
[4] 3ªf + 2ªf.

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{4 - 2a - \sqrt{2}a}{2(1-a)}} \Rightarrow (a^2 - a)x = a + 2 - \frac{4 - 2a - \sqrt{2}a}{1-a} - \frac{\sqrt{2} - 2}{1-a} =$$

$$= \frac{a - a^2 + 2 - 2a - 4 + 2a + \sqrt{2}a - \sqrt{2} + 2}{1-a} = \frac{a(1-a) - \sqrt{2}(1-a)}{1-a} = \frac{(1-a)(a-\sqrt{2})}{1-a} =$$

$$= a - \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a - \sqrt{2}}{a^2 - a}}$$

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P2.
El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección. (2,5 puntos)

Calculamos primero la ecuación del plano π, que es el plano que pasa por el punto $P_1(2,0,5)$ y es paralelo a los vectores $[\overrightarrow{P_1P_2}] = (-1,-2,-3)$ y $[\overrightarrow{P_1P_3}] = (1,-1,-3)$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3(x-2) - 6y + 3(z-5) = 3(x-2-2y+z-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x - 2y + z - 7 = 0$$

Como la esfera y el plano son tangentes, el radio de la esfera es la distancia de su centro al plano:

$$r = d(C,\pi) = \frac{|0-2-3-7|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

Si Q es el punto de intersección, la recta CQ es perpendicular al plano π. Por tanto, el vector característico del plano π, $\vec{v} = (1,-2,1)$, es su vector direccional. En consecuencia, sus ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$CQ \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases}$$

Como el punto Q está en dicha recta, $Q(\alpha, 1-2\alpha, -3+\alpha)$.

Y como el punto Q está en el plano π, satisface su ecuación:

$$\alpha - 2(1-2\alpha) - 3 + \alpha - 7 = 0 \Rightarrow \alpha - 2 + 4\alpha - 10 + \alpha = 0 \Rightarrow 6\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 2$$

Por tanto:

$$Q(2,-3,-1)$$

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P3.
Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} \cdot dx \qquad\qquad \int e^{2x} \cdot \text{sen}(2x+1) \cdot dx$$

(2,5 puntos)

a) Descomponemos el polinomio del denominador en factores:

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{x-7}{(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow x-7=A(x-2)+B(x+3) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=2 \Rightarrow -5=5B \Rightarrow B=-1 \\ \text{si } x=-3 \Rightarrow -10=-5A \Rightarrow A=2 \end{cases}$$

Ya podemos calcular la integral:

$$\int \frac{x-7}{(x+3)(x-2)} \cdot dx=\int \frac{2}{x+3} \cdot dx+\int \frac{-1}{x-2} \cdot dx=2 \cdot \ln|x+3|-\ln|x-2|+C$$

b) Vamos a utilizar el método tabular de integración por partes:

Signo	***Derivar***	***Integrar***
$+$	$\text{sen}(2x+1)$	e^{2x}
$-$	$2 \cdot \cos(2x+1)$	$\frac{1}{2} \cdot e^{2x}$
$+$	$-4 \cdot \text{sen}(2x+1)$	$\frac{1}{4} \cdot e^{2x}$

Por tanto:

$$\int e^{2x} \cdot \text{sen}(2x+1) \cdot dx=\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot \text{sen}(2x+1)-\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot \cos(2x+1)-\int e^{2x} \cdot \text{sen}(2x+1) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \text{sen}(2x+1) \cdot dx=\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot [\text{sen}(2x+1)-\cos(2x+1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \cdot \text{sen}(2x+1) \cdot dx=\frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot [\text{sen}(2x+1)-\cos(2x+1)]+\text{C}$$

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P4.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1/3 + \ln\frac{x^2+2}{3} & \text{si } x < 1 \\ x^2/3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$. (1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$. Enuncia los resultados teóricos utilizados y justifica su uso. (1,5 puntos)

a) La función f es derivable en $\mathbb{R}$:

- Es derivable en $(-\infty, 1) \cup (1. +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{2x/3}{(x^2+2)/3} = \frac{2x}{x^2+2} \quad \forall x < 1 \qquad\qquad f'(x) = \frac{2x}{3} \quad \forall x > 1$$

- Es derivable en $x = 1$:

$$f'_- = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{3} + \ln\frac{x^2+2}{3} - \frac{1}{3}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln\frac{x^2+2}{3}}{x-1} \overset{1}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{2x}{x^2+2}}{1} = \frac{2}{3}$$

$$f'_+ = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{3(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x/(x^2+2) & \text{si } x < 1 \\ 2x/3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de los valores intermedios en el intervalo cerrado $[0, 2]$, existe α en el intervalo abierto $(0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$.

En efecto:

1ª) La función f' es continua en el intervalo cerrado $[0, 2]$:

- Es continua en $[0, 1)$: $\lim\limits_{x\to a} f'(x) \overset{2}{=} f'(a) \ \ \forall a \in [0, 1)$
- Es continua en $(1, 2]$: $\lim\limits_{x\to a} f'(x) \overset{2}{=} f'(a) \ \ \forall a \in (1,2]$
- Es continua en x=1: $f'(1) = 2/3$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) \overset{2}{=} 2/3$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) \overset{2}{=} 2/3$

2ª) $f'(0) < 1 < f'(2)$:

- $f'(0) = 0 < 1$
- $f'(2) = 4/3 > 1$

Teorema de los valores intermedios (propiedad de Darboux):
Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el número d está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = d$.

---

[1] Como sale la indeterminada 0/0, aplicamos L'Hôpital.
[2] Es fácil verlo.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P5.

Sabiendo que la inversa de la matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz B. (2,5 puntos)

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{1}{\Rightarrow} B \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \overset{3}{=} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz $A \cdot B$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

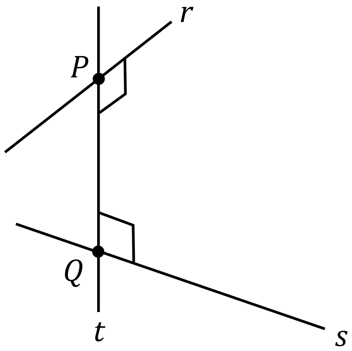
---

[1] Multiplicamos por la izquierda los dos miembros de la ecuación por la matriz B.
[2] Multiplicamos por la derecha los dos miembros de la ecuación por la matriz $A \cdot B$.
[3] La matriz $A \cdot B$ la hemos calculado a continuación.
[4] $1^{\text{a}}f \leftrightarrows 2^{\text{a}}f$.
[5] $2^{\text{a}}f + 6 \cdot 1^{\text{a}}f$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P6.
Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$ (2,5 puntos)

Un esquema puede ayudarnos a resolver el problema:



Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta r: [1]

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 - x - z \\ x = 7 - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 7 + 3z - z \\ x = 7 - 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 3\alpha \\ y = -3 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Como P es un punto de la recta r:

$$P(7 - 3\alpha, -3 + \alpha, \alpha)$$

Como Q es un punto de la recta s:

$$Q(-2 + 2\beta, \beta, -3)$$

El vector $[\overrightarrow{PQ}] = (-9 + 3\alpha + 2\beta, 3 - \alpha + \beta, -3 - \alpha)$ es perpendicular a los vectores direccionales de las rectas r y s, los vectores $\vec{u} = (-3, 1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$:

$$\begin{cases} [\overrightarrow{PQ}] \cdot \vec{u} = 0 \\ [\overrightarrow{PQ}] \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 - 9\alpha - 6\beta + 3 - \alpha + \beta - 3 - \alpha = 0 \\ -18 + 6\alpha + 4\beta + 3 - \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11\alpha + 5\beta = 27 \\ 5\alpha + 5\beta = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow 10 + 5\beta = 15 \Rightarrow \beta = 1$$

Por tanto:

$$\begin{cases} P(1, -1, 2) \\ Q(0, 1, -3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{PQ}] = (-1, 2, -5) \Rightarrow t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{5}$$

---

[1] Puede verse otra forma de hacerlo en el problema B2 de junio de 2009.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P7.
Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \text{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[1/2, 2]$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

1º) Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo [1/2,2]:

$$f(x) = e^{\pi x} \cdot \text{sen}(\pi x) \Rightarrow f'(x) = \pi \cdot e^{\pi x} \cdot \text{sen}(\pi x) + e^{\pi x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x)$$

Por tanto, f es continua en el intervalo por ser derivable en $\mathbb{R}$. Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

2º) Hallamos los extremos relativos de la función en el intervalo; y como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \pi \cdot e^{\pi x} \cdot [\text{sen}(\pi x) + \cos(\pi x)] = 0 \Rightarrow \text{sen}(\pi x) + \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\pi x) = -\cos(\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}(\pi x) = -1 \Rightarrow \pi x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3}{4} + k \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 3/4 \\ x = 7/4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la primera derivada en el intervalo $[1/2, 2]$:

$1/2$		$3/4$		$7/4$		2
	$+$		$-$		$+$	

Como f es continua en $x = 3/4$ y $x = 7/4$, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera f tiene un máximo relativo en $x = 3/4$ y un mínimo relativo en $x = 7/4$.

3º) Calculamos los valores de la función en los extremos relativos y en los extremos del intervalo:

x	$f(x)$
$1/2$	$e^{\pi/2}$
$3/4$	$(\sqrt{2}/2) \cdot e^{3\pi/4}$
$7/4$	$-(\sqrt{2}/2) \cdot e^{7\pi/4}$
2	0

4º) Conclusión:

La función tiene un máximo absoluto en $x = 3/4$ que vale $(\sqrt{2}/2) \cdot e^{3\pi/4}$ y un mínimo absoluto en $x = 7/4$ que vale $-(\sqrt{2}/2) \cdot e^{7\pi/4}$.

[1] Las demás soluciones no pertenecen al intervalo $[1/2, 2]$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2020. PROBLEMA P8.
Sean las funciones $f(x) = x/2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

1º) Hallamos primero los puntos de corte de ambas gráficas:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x/2 + 1 = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow \mathrm{x} + 2 = 2\sqrt{x-2} + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x-2} = x - 2 \Rightarrow 4x - 8 = x^2 + 4 - 4x \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

2º) Averiguamos la posición relativa de ambas gráficas en el intervalo $(2, 6)$:

x	$f(x)$	$g(x)$
3	5/2	3

3º) Calculamos el área:

$$A = \int_2^6 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_2^6 \left[\sqrt{x-2} + 2 - x/2 - 1\right] \cdot dx = \int_2^6 \left[(x-2)^{1/2} + 1 - x/2\right] \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{(x-2)^{1/2+1}}{1/2+1} + x - \frac{x^2/2}{2}\right]_2^6 = \left[\frac{(x-2)^{3/2}}{3/2} + x - \frac{x^2}{4}\right]_2^6 = \left(\frac{16}{3} + 6 - 9\right) - (2-1) = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

[1] Como se trata de una ecuación irracional, hay que comprobar las soluciones.