EXTRAORDINARIO DE 2017. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 2x+(a^2+2)y+3z=3 \\ -2x-(a^2+2)y+(a-3)z=\sqrt{2}-3 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & a^2+2 & 3 & 3 \\ -2 & -a^2-2 & a-3 & \sqrt{2}-3 \end{array}\right) \overset{[1]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-2 & 2 & 2 \\ 0 & -a^2+2 & a-2 & \sqrt{2}-2 \end{array}\right) \overset{[2]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 4 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{a^2-2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{a} & \sqrt{2} \end{array}\right) \overset{[3]}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2-2=0 \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2} \\ a=0 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1°) Si $a=-\sqrt{2}$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right) \overset{[4]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{array}\right)$$

2°) Si $a=0$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

3°) Si $a=\sqrt{2}$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right) \overset{[5]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}-2y-\frac{z}{2}=\frac{1}{2}-2y-\frac{1}{2}=-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=1 \end{cases}$$

4°) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=1 \\ (a^2-2)y+2z=2 \\ az=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{a}} \Rightarrow (a^2-2)y=2-2z=2-\frac{2\sqrt{2}}{a}=\frac{2a-2\sqrt{2}}{a}=\frac{2(a-\sqrt{2})}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{2(a-\sqrt{2})}{a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{a(a+\sqrt{2})}} \Rightarrow 2x=1-z-4y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=1-\frac{\sqrt{2}}{a}-\frac{8}{a(a+\sqrt{2})}=\frac{a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}a-2-8}{a(a+\sqrt{2})} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a^2-10}{a(a+\sqrt{2})}}$$

---

[1] 2ªf-1ªf; 3ªf+1ªf.

[2] 3ªf+2ªf.

[3] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4°).

[4] 3ªf+2ªf$\cdot\sqrt{2}/2$.

[5] 3ªf-2ªf$\cdot\sqrt{2}/2$.

EXTRAORDINARIO DE 2017. PROBLEMA A2.

Comprueba que las rectas r y s se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P. Encuentra un punto R∈r y un punto S∈s de forma que P,R,S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2} \qquad s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$$

(2 PUNTOS)

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}=\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1+2\alpha \\ z=1-2\alpha \end{cases} \qquad s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}=\beta \Rightarrow \begin{cases} x=2\beta \\ y=\beta \\ z=-3+2\beta \end{cases}$$

El punto $P(1+\alpha,-1+2\alpha,1-2\alpha)$ de la recta r está en la recta s si satisface su ecuación:[1]

$$\frac{1+\alpha}{2}=\frac{-1+2\alpha}{1}=\frac{1-2\alpha+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} 1+\alpha=-2+4\alpha \\ -2+4\alpha=4-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha=3 \\ 6\alpha=6 \end{cases} \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow P(2,1,-1)$$

Las rectas r y s son perpendiculares, ya que sus vectores direccionales, $\vec{u}=(1,2,-2)$ y $\vec{v}=(2,1,2)$, son ortogonales:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,2,-2)\cdot(2,1,2)=2+2-4=0$$

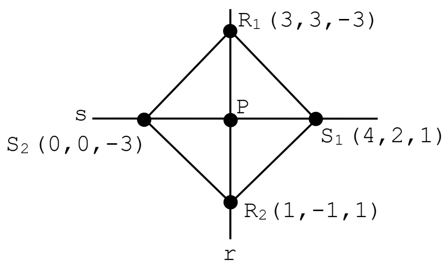
Como $|\vec{u}|=3$ y $|[\overrightarrow{PR}]|=3$, $[\overrightarrow{PR}]=\vec{u}$. Por tanto, si $R(x,y,z)$:[2]

$$(x-2,y-1,z+1)=(1,2,-2) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ y-1=2 \\ z+1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow R(3,3,-3)$$

Como $|\vec{v}|=3$, y $|[\overrightarrow{PS}]|=3$, $[\overrightarrow{PS}]=\vec{v}$. Por tanto, si $S(x,y,z)$:

$$(x-2,y-1,z+1)=(2,1,2) \Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ y-1=1 \\ z+1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow S(4,2,1)$$

Por puntos medios pueden obtenerse las demás soluciones:



---

[1] Para comprobar que las rectas son secantes y, si lo son, calcular el punto de corte resolvemos el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de la recta r y las ecuaciones generales de la recta s. Otra forma de hacerlo consiste en resolver el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de ambas rectas (o por sus ecuaciones generales).

[2] Otra forma de calcular los puntos R y S es resolver las ecuaciones $d(P,R)=3$ y $d(P,S)=3$, donde $R(1+\alpha,-1+2\alpha,1-2\alpha)$ y $S(2\beta,\beta,-3+2\beta)$.

EXTRAORDINARIO DE 2017. PROBLEMA A3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2} \quad y \quad \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx) \qquad \text{(2 PUNTOS)}$$

PRIMERA INTEGRAL:

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{x^2-x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(x-2)+B(x+1) \Rightarrow \begin{cases} Si\ \ x=-1 \Rightarrow 1=-3A \Rightarrow A=-1/3 \\ Si\ \ x=2 \Rightarrow 1=3B \Rightarrow B=1/3 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2}=\int \frac{-1/3}{x+1}\cdot dx+\int \frac{1/3}{x-2}\cdot dx=-\frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{x+1}\cdot dx+\frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{x-2}\cdot dx \stackrel{1}{=}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot \ln|x+1|+\frac{1}{3}\cdot \ln|x-2|+C$$

Comprobación:

$$\left[-\frac{1}{3}\cdot \ln|x+1|+\frac{1}{3}\cdot \ln|x-2|\right]'=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{-x+2+x+1}{3(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x^2-x-2}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

$$\int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx \stackrel{2}{=} \frac{1}{2}\cdot x^2 \cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x}+\frac{1}{4}\cdot e^{2x}+C$$

S	D	I
+	x^2	e^{2x}
−	$2x$	$1/2 \cdot e^{2x}$
+	2	$1/4 \cdot e^{2x}$
−	0	$1/8 \cdot e^{2x}$

Comprobación:

$$\left[e^{2x}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right)\right]'=2\cdot e^{2x}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right)+e^{2x}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=e^{2x}\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}\right)=x^2\cdot e^{2x}$$

---

[1] Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.

[2] Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son casi inmediatas de tipo exponencial. Se pueden simplificar estas integrales haciendo primero el cambio $2x=t$, $2\cdot dx=dt$.

EXTRAORDINARIO DE 2017. PROBLEMA A4.

Demuestra que existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=-1/3$, siendo $f(x)=(x+1)^{(x-1)\cdot\cos(\pi x/2)}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 PUNTOS)

Primero derivamos la función:

$$f(x)=(x+1)^{(x-1)\cdot\cos(\pi x/2)}=e^{(x-1)\cdot\cos(\pi x/2)\cdot\ln(x+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^{(x-1)\cdot\cos(\pi x/2)\cdot\ln(x+1)}\cdot\left[(x-1)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(x+1)\right]'=$$

$$=f(x)\cdot\left[\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(x+1)-\frac{\pi}{2}\cdot(x-1)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(x+1)+(x-1)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right]$$

Por tanto, $\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=(-1,+\infty)$.

* * *

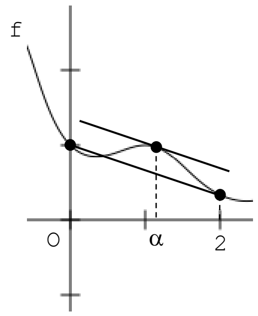
Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange[1] en el intervalo [0,2], existe α en (0,2) tal que:[2]

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3^{-1}-1^{-1}}{2}=\frac{1/3-1}{2}=\frac{-2/3}{2}=-\frac{1}{3}$$

En efecto:

1ª) f es continua en [0,2] por ser derivable en $(-1,+\infty)$.

2ª) f es derivable en (0,2) por serlo en $(-1,+\infty)$.



[1] También podría hacerse el problema probando que la función $g(x)=f(x)+x/3$ cumple las condiciones del teorema de Rolle.

[2] Como parece ser este caso, α no tiene porqué ser único.

EXTRAORDINARIO DE 2017. PROBLEMA B1.

Encuentra la matriz X que verifica $7A-A^7=BB'X$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculamos A^7:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix} \ldots \Rightarrow A^7=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$7A-A^7=7\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -7 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$BB'=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Tenemos que resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

La resolvemos por el método de Gauss-Jordan:[1]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 2 & 6 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 6\end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}2 & 2 & 0 & 6\\ 5 & 2 & 6 & 0\end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 3\\ 5 & 2 & 6 & 0\end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 6 & -15\end{array}\right) \overset{5}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

[1] Otra forma de proceder consiste en multiplicar (por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por la matriz inversa de BB' (que se puede calcular por el método de Gauss-Jordan o utilizando determinantes). También se puede resolver el sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas que resulta al operar el primer miembro de la ecuación e igualarlo al segundo.

[2] 1ªf↔2ªf.

[3] 1ªf/2.

[4] 2ªf-5·1ªf.

[5] 2ªf/(-3).

[6] 1ªf-2ªf.

EXTRAORDINARIO DE 2017. PROBLEMA B2.

A, B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi\equiv 4x+2y+z-4=0$. Encuentra un punto, D, de la recta r tal que A, B, C, y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-3}{-1}$$

(3 PUNTOS)

Calculamos primero los puntos de corte de los ejes coordenados con el plano π:

x	y	z
1	0	0
0	2	0
0	0	4

Como el punto D pertenece a la recta r, $D(1+\alpha,3,3-\alpha)$.

El volumen del paralelepípedo determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,4)$ y $D(1+\alpha,3,3-\alpha)$ es el valor absoluto del producto mixto de los vectores $[\overrightarrow{AB}]=(-1,2,0)$, $[\overrightarrow{AC}]=(-1,0,4)$ y $[\overrightarrow{AD}]=(\alpha,3,3-\alpha)$:

$$\left\|\begin{matrix}-1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 4\\ \alpha & 3 & 3-\alpha\end{matrix}\right\|=|8\alpha+2(3-\alpha)+12|=|8\alpha+6-2\alpha+12|=|6\alpha+18|$$

Por tanto:

$$|6\alpha+18|=6 \Rightarrow |\alpha+3|=1 \Rightarrow \alpha+3=\pm1 \Rightarrow \alpha=\pm1-3 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-4 \Rightarrow D(-3,3,7)\\ \alpha=-2 \Rightarrow D(-1,3,5)\end{cases}$$

Extraordinario de 2017. Problema B3.

Demuestra que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $f'(\alpha)=3$, siendo $f(x)=(x+1)^{x+1}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2 Puntos)

Derivamos primero la función:

$$f(x)=(x+1)^{x+1}=e^{(x+1)\cdot\ln(x+1)} \Rightarrow f'(x)=e^{(x+1)\cdot\ln(x+1)}\cdot[(x+1)\cdot\ln(x+1)]'=$$

$$=(x+1)^{x+1}\cdot\left[\ln(x+1)+(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\right]=(x+1)^{x+1}\cdot[1+\ln(x+1)]$$

Evidentemente, $\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(f')=(-1,+\infty)$.

* * *

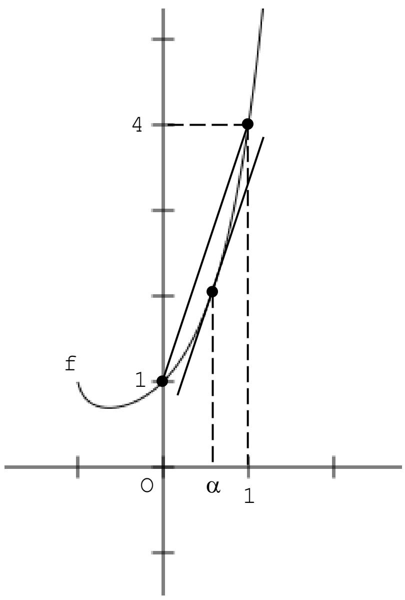
Como la función f satisface en el intervalo [0,1] las condiciones del teorema de Lagrange,[1] existe α en (0,1) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2^2-1^1}{1}=3$$

En efecto:

1ª) f es continua en [0,1] por ser derivable en $(-1,+\infty)$.

2ª) f es derivable en (0,1) por serlo en $(-1,+\infty)$.



[1] También podría hacerse el problema probando que la función $g(x)=f(x)-3x$ cumple las condiciones del teorema de Rolle.

EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B4.

Dadas las funciones $f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$ y $g(x)=x^3-4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 Puntos)

1°) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \\ y=x^3-4x \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)=x^3-4x \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

2°) Averiguamos entre -2 y 0 y entre 0 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
-1	-1	3
1	1	-3

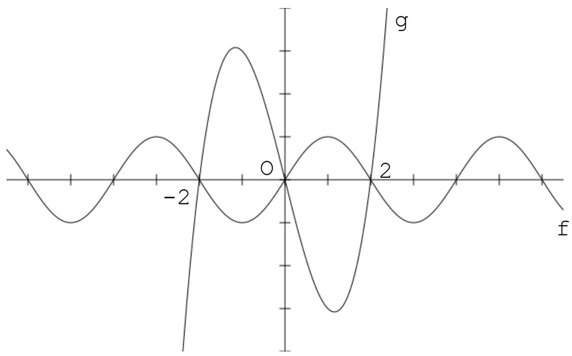
3°) Calculamos el área:[2]

$$A=\int_{-2}^{0}\left[x^3-4x-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\cdot dx+\int_{0}^{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x^3+4x\right]\cdot dx \overset{3}{=}$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-4\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{x^4}{4}+4\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=$$

$$=\left[\left(0-4\cdot 0+\frac{2}{\pi}\cdot 1\right)-\left(4-4\cdot 2+\frac{2}{\pi}\cdot(-1)\right)\right]+\left[\left(-\frac{2}{\pi}\cdot(-1)-4+4\cdot 2\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cdot 1-0+4\cdot 0\right)\right]=$$

$$=\left[\frac{2}{\pi}+4+\frac{2}{\pi}\right]+\left[\frac{2}{\pi}+4+\frac{2}{\pi}\right]=2\cdot\left[\frac{4}{\pi}+4\right]=\frac{8+8\pi}{\pi}$$



[1] Esta ecuación se resuelve a ojo.

[2] Como las dos funciones son impares, podría calcularse sólo una de las integrales y multiplicar el resultado por dos.

[3] La integral de los dos primeros sumandos de la primera integral y de los dos últimos de la segunda es inmediata de tipo potencial, mientras que la del tercer sumando de la primera integral y la del primero de la segunda es casi inmediata de tipo coseno.