

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-3)x+(a-2)y+2z=-1 \\ (2a-6)x+(3a-6)y+5z=-1 \\ (3-a)x+(a-2)z=a^2-4a+5 \end{cases} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 2(a-3) & 3(a-2) & 5 & -1 \\ 3-a & 0 & a-2 & a^2-4a+5 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & a & a^2-4a+4 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-4a+3 \end{array} \right) \stackrel{3}{\rightarrow} \begin{cases} a-3=0 \Rightarrow a=3 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} -2x-y+2z=-1 \\ -y+z=1 \end{cases} \stackrel{4}{\Rightarrow} \\ & \Rightarrow \begin{cases} 2x=1-y+2z=3+y \\ z=1+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3+2x \\ z=1-3+2x=-2+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-3+2\alpha \\ z=-2+2\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

2º) Si $a=2$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

3º) Si $a=3$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \stackrel{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \stackrel{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:⁷

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} (a-3)x+(a-2)y+2z=-1 \\ (a-2)y+z=1 \\ (a-1)z=(a-1)(a-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z=a-3} \Rightarrow (a-2)y=1-z=1-a+3=4-a \Rightarrow \boxed{y=\frac{4-a}{a-2}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (a-3)x=-1-(a-2)y-2z=-1-(a-2)\cdot\frac{4-a}{a-2}-2(a-3)=-1-4+a-2a+6=1-a \Rightarrow \boxed{x=\frac{1-a}{a-3}} \end{aligned}$$

¹ $2^a f - 2 \cdot 1^a f$; $3^a f + 1^a f$.

² $3^a f - 2^a f$.

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

⁴ Despejamos z en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

⁵ $2^a f - 1^a f$.

⁶ $3^a f + 2 \cdot 2^a f$.

⁷ En los cálculos anteriores hemos comprobado que las raíces del polinomio a^2-4a+5 son $a=1$ y $a=3$.

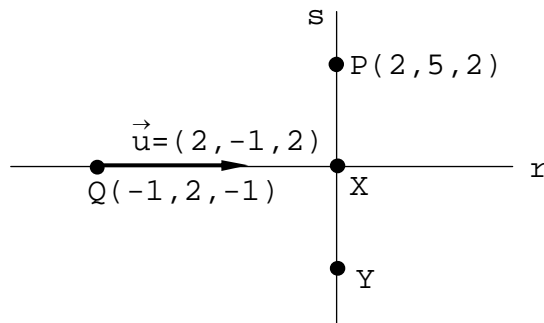
EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A2.Halla el simétrico del punto $P(2,5,2)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

(2 PUNTOS)

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r :

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases}$$

De la recta r conocemos, pues, un punto, $Q(-1,2,-1)$, y un vector direccional, $\vec{u}(2,-1,2)$:Si el punto X es la proyección de P sobre r , como X está en la recta r , $X(-1+2\alpha, 2-\alpha, -1+2\alpha)$.Como las rectas r y s son perpendiculares, sus vectores direccionales son ortogonales:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot [\vec{PX}] &= 0 \Rightarrow (2, -1, 2) \cdot (2\alpha - 3, -\alpha - 3, 2\alpha - 3) = 0 \Rightarrow 4\alpha - 6 + \alpha + 3 + 4\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9\alpha - 9 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow X(1, 1, 1) \end{aligned}$$

Si $Y(x, y, z)$, como X es el punto medio del segmento PY :

$$\frac{2+x}{2} = 1, \quad \frac{5+y}{2} = 1, \quad \frac{2+z}{2} = 1 \Rightarrow x=0, \quad y=-3, \quad z=0 \Rightarrow Y(0, -3, 0)$$

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A3.

Dada la función f, demuestra que existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right) \cdot \cos\frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2e^x+2x-x^2) \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

Por la fórmula del seno de la suma de dos ángulos:

$$\sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Por tanto:

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x+2x-x^2)$$

Derivamos la función:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln(2e^x+2x-x^2) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \frac{2e^x+2-2x}{2e^x+2x-x^2} \stackrel{1}{=} \\ &= -\frac{\pi}{2} \cdot \sin(\pi x) \cdot \ln(2e^x+2x-x^2) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \frac{2e^x+2-2x}{2e^x+2x-x^2} \end{aligned}$$

Ahora bien: $0 < e^x \stackrel{2}{\Rightarrow} 0 < 2e^x \stackrel{3}{\Rightarrow} 2x-x^2 < 2e^x+2x-x^2 \Rightarrow x(2-x) < 2e^x+2x-x^2$.

Como $x(2-x)$ es positivo en el intervalo $(0,2)$ y nulo en los extremos de ese intervalo, $2e^x+2x-x^2$ es positivo en $[0,2]$.

Por tanto, $[0,2] \subset \text{Dom}(f) = \text{Dom}(f')$.

* * *

Como f satisface las condiciones del **teorema de Lagrange** en el intervalo cerrado $[0,2]$, existe α en el intervalo abierto $(0,2)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\ln(2 \cdot e^2) - \ln 2}{2} \stackrel{4}{=} \frac{\ln 2 + 2 - \ln 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

En efecto:

1a) f es continua en $[0,2]$ por ser derivable en $[0,2]$.

2a) f es derivable en $(0,2)$ por serlo en $[0,2]$.

¹ $2 \cdot \sin a \cdot \cos a = \sin(2a)$.

² Multiplicamos los dos miembros de la desigualdad por 2.

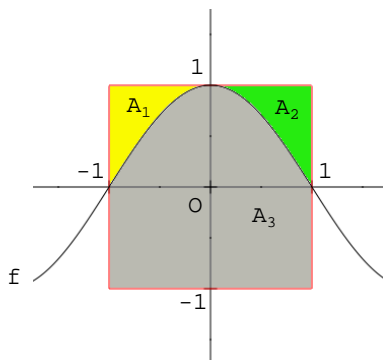
³ Sumamos a los dos miembros de la desigualdad $2x-x^2$.

⁴ Por las propiedades de los logaritmos.

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A4.

La gráfica de la función $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ divide al cuadrado de centro $(0,0)$ y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de ellas. (3 Puntos)

Primero dibujamos el cuadrado y la gráfica de la función:



$$A_1 = \int_{-1}^0 \left[1 - \cos \frac{\pi x}{2} \right] \cdot dx = \left[x - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right]_{-1}^0 = \left[\left(0 - \frac{2}{\pi} \cdot 0 \right) - \left(-1 - \frac{2}{\pi} \cdot (-1) \right) \right] = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

Por tanto, como f es par:

$$A_2 = A_1$$

$$A_3 = 4 - 2 \cdot A_1 = 4 - \frac{2\pi - 4}{\pi} = \frac{2\pi + 4}{\pi}$$

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA B1.

Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $|A^{-1}| = -1$, siendo A la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices factores:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} t & 2 & t+2 \\ 0 & t+2 & t+2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} t \cdot \begin{vmatrix} t+2 & t+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = t(t+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = t(t+2)$$

Por tanto:

$$t^2 + 2t = -1 \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

¹ $2^{af+1}af$.

² Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.

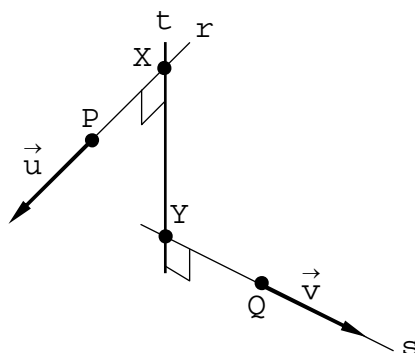
EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Calculamos primero las ecuaciones paramétricas y las determinaciones lineales de las rectas:

$$\begin{aligned} \bullet r &\equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \stackrel{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+5-2x=3 \\ z=5-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2+x \\ z=5-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-2+\alpha \\ z=5-2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0, -2, 5) \\ \vec{u}(1, 1, -2) \end{cases} \\ \bullet s &\equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} = \beta \Rightarrow \begin{cases} x=2-2\beta \\ y=-3+\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(2, -3, 1) \\ \vec{v}(-2, 1, 1) \end{cases} \end{aligned}$$



Por estar el punto X en la recta r : $X(\alpha, -2+\alpha, 5-2\alpha)$.

Por estar el punto Y en la recta s : $Y(2-2\beta, -3+\beta, 1+\beta)$.

Por tanto: $[\vec{XY}] = (2-2\beta-\alpha, -1+\beta-\alpha, -4+\beta+2\alpha)$.

Como $[\vec{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(1, 1, -2)$ y a $\vec{v}(-2, 1, 1)$:

$$\begin{cases} [\vec{XY}] \cdot \vec{u} = 0 \\ [\vec{XY}] \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2\beta-\alpha-1+\beta-\alpha+8-2\beta-4\alpha=0 \\ -4+4\beta+2\alpha-1+\beta-\alpha-4+\beta+2\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha+3\beta=9 \\ 3\alpha+6\beta=9 \end{cases} \stackrel{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9\beta = -9 \\ 3\alpha + 6\beta = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \stackrel{3}{\Rightarrow} \begin{cases} X(1, -1, 3) \\ Y(0, -2, 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\vec{XY}] = (-1, -1, -1) \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

¹ Despejamos z en la segunda ecuación y sustituimos en la primera.

² A la primera ecuación le resto 2 veces la segunda.

³ Si los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s . Si el sistema es compatible indeterminado, se trata de dos rectas paralelas (los vectores direccionales de r y s te habrán salido colineales), y entonces hay infinitas soluciones.

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA B3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx \quad \text{y} \quad \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

PRIMERA INTEGRAL:

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2+3x-4} &= \frac{x+1}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x-1)}{x^2+3x-4} \Rightarrow \\ \Rightarrow x+1 &= A(x+4)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow 2=5A \Rightarrow A=2/5 \\ \text{Si } x=-4 \Rightarrow -3=-5B \Rightarrow B=3/5 \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx &= \int \frac{2/5}{x-1} \cdot dx + \int \frac{3/5}{x+4} \cdot dx = \frac{2}{5} \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx + \frac{3}{5} \cdot \int \frac{1}{x+4} \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \ln|x-1| + \frac{3}{5} \cdot \ln|x+4| + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{5} \cdot \ln|x-1| + \frac{3}{5} \cdot \ln|x+4| \right]' &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+4} = \frac{2}{5(x-1)} + \frac{3}{5(x+4)} = \frac{2x+8+3x-3}{5(x-1)(x+4)} = \\ &= \frac{5x+5}{5(x-1)(x+4)} = \frac{5(x+1)}{5(x-1)(x+4)} = \frac{x+1}{x^2+3x-4} \end{aligned}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx = \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cdot dx \stackrel{2}{=} \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{-1}{t} + C \stackrel{3}{=} \frac{-1}{1+e^x} + C$$

Comprobación:

$$\left[\frac{-1}{1+e^x} \right]' = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}$$

¹ Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.

² Hacemos el cambio $1+e^x=t \Rightarrow e^x \cdot dx=dt$.

³ Deshacemos el cambio.

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA B4.

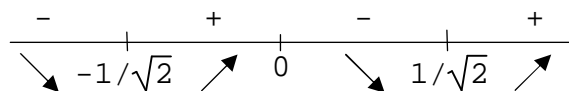
Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^4 - x^2$$

(3 Puntos)

EXTREMOS RELATIVOS:**1º)** Derivamos la función:

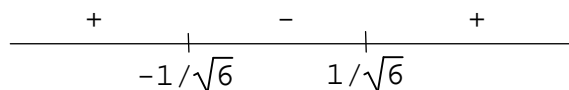
$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 4x\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2º) Estudiamos el signo de la derivada:**3º)** Por el criterio de la variación del signo de la primera derivada:

- En $x = -1/\sqrt{2}$ la función tiene un mínimo relativo que vale $y = -1/4$.
- En $x = 0$ la función tiene un máximo relativo que vale $y = 0$.
- En $x = 1/\sqrt{2}$ la función tiene un mínimo relativo que vale $y = -1/4$.

PUNTOS DE INFLEXIÓN:**1º)** Calculamos la derivada segunda de f :

$$f''(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x^2 - \frac{1}{6}\right) = 12\left(x - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

2º) Estudiamos el signo de la segunda derivada:**3º)** Por el criterio de la variación del signo de la segunda derivada:

- En $x = -1/\sqrt{6}$ la función tiene un p. de i. que vale $y = -5/36$.
- En $x = 1/\sqrt{6}$ la función tiene un p. de i. que vale $y = -5/36$.