

JUNIO DE 2017. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ x+(a^2-5a+5)z=-a+4 \end{cases} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 & -a+4 \end{pmatrix} \stackrel{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 0 & -a+1 & a^2-5a+4 & -a+5 \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-5a+6 & -a+3 \end{pmatrix} \stackrel{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a^2-5a+6=0 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} a=2 \\ a=3 \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=1$, el sistema es incompatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2º) Si $a=2$, el sistema es incompatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3º) Si $a=3$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2y+2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y-z=-1+2+2z-z=1+z \\ y=-1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ (a-2)(a-3)z=-(a-3) \end{cases} \Rightarrow z=\frac{-(a-3)}{(a-2)(a-3)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{-1}{a-2}} \Rightarrow (a-1)y=-2-2z=$$

$$-2+\frac{2}{a-2}=\frac{-2a+4+2}{a-2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-2a+6}{(a-1)(a-2)}} \Rightarrow x=-1-(a-1)y-z=-1+\frac{2a-6}{a-2}+\frac{1}{a-2}=$$

$$=\frac{-a+2+2a-6+1}{a-2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a-3}{a-2}}$$

¹ $3^a f - 1^a f$.

² $3^a f + 2^a f$.

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

⁴ $3^a f - 2^a f$.

JUNIO DE 2017. PROBLEMA A2.

Dados el punto $P(1,-1,0)$ y las rectas r y s , halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ 3x-y-4z+6=0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

Como la recta r está en el plano $2x-y-2z+1=0$, el vector $(2,-1,-2)$ es perpendicular a r .

Como la recta r también está en el plano $3x-y-4z+6=0$, el vector $(3,-1,-4)$ es perpendicular a r .

Por tanto, un vector direccional¹ de dicha recta es:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

Por otro lado, un vector direccional de la recta s es $\vec{v} = (1,0,1)$.

Como el plano π es paralelo a ambas rectas, un vector característico de dicho plano es:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

Por tanto, $\pi \equiv 2x - y - 2z + D = 0$.

Por último, como la distancia del punto $P(1,-1,0)$ al plano π es 2:

$$\begin{aligned} d(P, \pi) = 2 &\Rightarrow \frac{|2 \cdot 1 - (-1) - 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \Rightarrow |3+D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3+D=6 \\ 3+D=-6 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} D=3 \\ D=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ \pi \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

¹ Otra forma de obtener un vector direccional de la recta r es calculando sus ecuaciones paramétricas, esto es, resolviendo el sistema que forman los dos planos que la determinan.

JUNIO DE 2017. PROBLEMA A3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2-5x+7}) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +1} [\cos(\pi x) + 2^x]^{1/\ln x} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

PRIMER LÍMITE:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2-5x+7}) \stackrel{1}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2+3x+1} - \sqrt{2x^2-5x+7}) \cdot (\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7})}{\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7}} \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x+1-2x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7}} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x-6}{\sqrt{2x^2+3x+1} + \sqrt{2x^2-5x+7}} \stackrel{4}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (8-6/x)}{x \cdot (\sqrt{2+3/x+1/x^2} + \sqrt{2-5/x+7/x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8-6/x}{\sqrt{2+3/x+1/x^2} + \sqrt{2-5/x+7/x^2}} = \\ &= \frac{8-0}{\sqrt{2+0+0} + \sqrt{2-0+0}} = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} [\cos(\pi x) + 2^x]^{1/\ln x} \stackrel{5}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} \cdot [\cos(\pi x) + 2^x - 1] \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 2^x - 1}{\ln x}} \stackrel{6}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \cdot \text{sen}(\pi x) + 2^x \cdot \ln 2}{1/x}} = \\ &= e^{\frac{-\pi \cdot \text{sen}(\pi \cdot 1) + 2^1 \cdot \ln 2}{1/1}} = e^{\frac{-\pi \cdot 0 + 2 \cdot \ln 2}{1}} = e^{2 \cdot \ln 2} \stackrel{7}{=} e^{\ln 4} \stackrel{8}{=} 4 \end{aligned}$$

-
- 1 Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.
 - 2 Operamos el numerador.
 - 3 Simplificamos el numerador.
 - 4 Sacamos x factor común en el numerador y en el denominador.
 - 5 Ya que sale la indeterminación 1°.
 - 6 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
 - 7 Por las propiedades de los logaritmos.
 - 8 Por la definición de logaritmo.

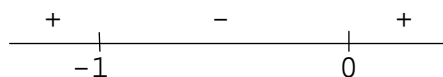
JUNIO DE 2017. PROBLEMA A4.

Demuestra que la función $f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1,3)$.
Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 PUNTOS)

1º) Como la **condición necesaria de extremo relativo** es que la derivada valga cero, se considera la función:

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \sqrt{x^2+x} + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \frac{2x+1}{2 \cdot \sqrt{x^2+x}}$$

Estudiamos el signo de $x^2+x=x(x+1)$:



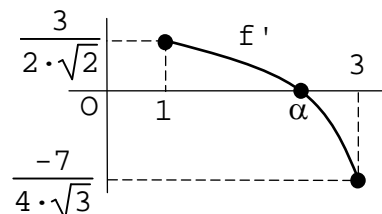
Por tanto, $\text{Dom}(f)=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$ y $\text{Dom}(f')=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

2º) Como la función f' satisface las condiciones del **teorema de Bolzano**, existe α en $(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(1) \cdot f'(3) < 0$:

- $f'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \frac{3}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{2}} > 0$.
- $f'(3) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot 2\sqrt{3} - 1 \cdot \frac{7}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{-7}{4 \cdot \sqrt{3}} < 0$.



2ª) f' es continua en $[1,3]$:

- $[1,3] \subset \text{Dom}(f') \subset \text{Dom}(f)$.
- Si $a \in [1,3]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \sqrt{x^2+x} + \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \frac{2x+1}{2 \cdot \sqrt{x^2+x}} \right] = \\ &= \left[\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) \cdot \sqrt{a^2+a} + \text{sen}\left(\frac{\pi a}{2}\right) \cdot \frac{2a+1}{2 \cdot \sqrt{a^2+a}} \right] = f'(a) \end{aligned}$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α , por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α , entonces, por el **criterio de la variación del signo de la primera derivada**, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

JUNIO DE 2017. PROBLEMA B1.

Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Calculamos el determinante de la matriz A :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -t+2 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} -(-t-1) \cdot \begin{vmatrix} -t+2 & -t+2 \\ 1 & -t+1 \end{vmatrix} = \\ &= (t+1) \cdot (-t+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -t+1 \end{vmatrix} = -(t+1)(t-2) \cdot (-t+1-1) = t(t+1)(t-2) \end{aligned}$$

Para que la matriz A no sea regular su determinante debe ser cero:

$$|A|=0 \Rightarrow t(t+1)(t-2)=0 \Rightarrow t=0, t=-1, t=2$$

¹ $1^a f + 3^a f$.

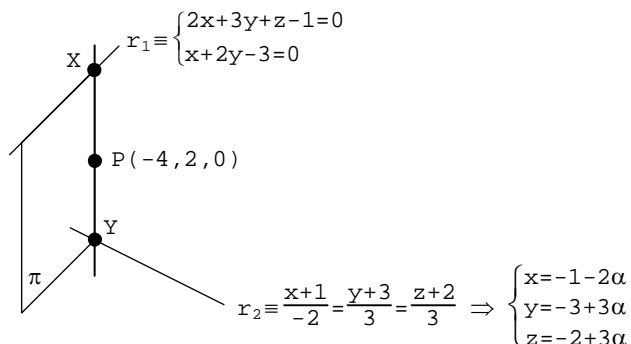
² Desarrollamos el determinante por los elementos de la segunda columna.

JUNIO DE 2017. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-4,2,0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Sean X e Y los puntos de corte de la recta buscada con r_1 y r_2 , respectivamente:¹



El punto P y la recta r_1 determinan el plano π . Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r_1 , tiene por ecuación:²

$$\pi \equiv a(2x+3y+z-1) + b(x+2y-3) = 0$$

Como el punto $P(-4,2,0)$ está en el plano π , satisface su ecuación:

$$a(-8+6+0-1) + b(-4+4-3) = 0 \Rightarrow -3a-3b=0 \Rightarrow b=-a$$

Por tanto:

$$a(2x+3y+z-1) - a \cdot (x+2y-3) = 0 \Rightarrow a(2x+3y+z-1-x-2y+3) = 0 \stackrel{3}{\Rightarrow} \pi \equiv x+y+z+2=0$$

Como el punto Y está en la recta r_2 :

$$Y(-1-2\alpha, -3+3\alpha, -2+3\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π , satisface su ecuación:

$$-1-2\alpha-3+3\alpha-2+3\alpha+2=0 \Rightarrow 4\alpha-4=0 \Rightarrow 4\alpha=4 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(-3,0,1) \Rightarrow \vec{[PY]} = (1, -2, 1) \Rightarrow XY \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$$

¹ Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

² Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta r_1 .

³ Como $a \neq 0$, podemos dividir los dos miembros por a . (Si a fuese 0, entonces b también valdría 0, ya que $b=-a$; pero a y b no pueden ser simultáneamente nulos.)

JUNIO DE 2017. PROBLEMA B3.

Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=(x^2-3)\cdot e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2,4]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

1°) Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo:

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x+2}-(x^2-3)\cdot e^{-x+2}=e^{-x+2}\cdot(2x-x^2+3)\Rightarrow \text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\Rightarrow \\ \Rightarrow f \text{ es continua en } \mathbb{R}\Rightarrow f \text{ es continua en } [-2,4]$$

Por el **teorema de Weierstrass** la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

2°) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo:

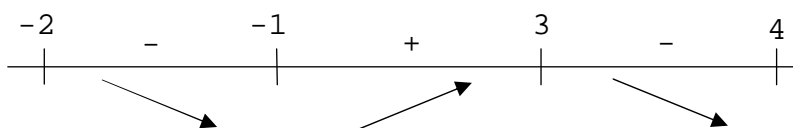
$$f(-2)=(4-3)\cdot e^4=e^4 \\ f(4)=(16-3)\cdot e^{-2}=13/e^2$$

3°) Hallamos los extremos relativos de la función en el intervalo:

Como la **condición necesaria de extremo relativo** es que la derivada valga cero:

$$f'(x)=0\Rightarrow e^{-x+2}\cdot(2x-x^2+3)=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de f' en el intervalo:



Como f es continua en $x=-1$ y $x=3$, por el **criterio de la variación del signo de la derivada primera** f tiene un mínimo relativo en el punto $x=-1$, que vale $y=f(-1)=-2\cdot e^3$, y un máximo relativo en el punto $x=3$, que vale $y=f(3)=6\cdot e^{-1}=6/e$.

4°) Conclusión:

La función f tiene en $x=-2$ un máximo absoluto que vale $y=e^4$; y en $x=-1$ un mínimo absoluto que vale $y=-2\cdot e^3$:

x	f(x)
-2	$e^4\approx 54,598$
-1	$-2\cdot e^3\approx -40,171$
3	$6/e\approx 2,207$
4	$13/e^2\approx 1,759$

JUNIO DE 2017. PROBLEMA B4.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y $g(x)=\frac{x^2}{4}-1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 Puntos)

1°) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

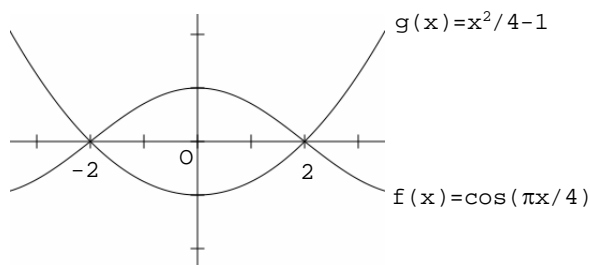
$$\begin{cases} y=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ y=\frac{x^2}{4}-1 \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)=\frac{x^2}{4}-1 \xrightarrow{1} \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

2°) Averiguamos entre -2 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
0	1	-1

3°) Calculamos el área:²

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 \left[\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^2}{4} + 1 \right] \cdot dx \stackrel{3}{=} \left[\frac{4}{\pi} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^3}{12} + x \right]_{-2}^2 = \\ &= \left[\left(\frac{4}{\pi} \cdot 1 - \frac{8}{12} + 2 \right) - \left(\frac{4}{\pi} \cdot (-1) + \frac{8}{12} - 2 \right) \right] = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} + 2 + \frac{4}{\pi} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{\pi} + \frac{8}{3} = \frac{24+8\pi}{3\pi} \end{aligned}$$



¹ Esta ecuación se resuelve a ojo.

² Si se repara en que la función integrando es una función par, puede calcularse la integral entre 0 y 2, y multiplicar el resultado por 2.

³ La integral del primer sumando es casi inmediata de tipo seno y las integrales de los otros dos son inmediatas de tipo potencial.