Extraordinario de 2016. Problema A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2y+z=1 \\ (a-1)x+(a+2)y+z=0 \\ (a^2-a)x-ay=a+2 \end{cases}$$

(3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 & 0 \\ a^2-a & -a & 0 & a+2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a+2 & a-1 & 0 \\ 0 & -a & a^2-a & a+2 \end{array}\right) \end{array} \overset{2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & a-1 & -1 \\ 0 & -a & a^2-a & a+2 \end{array}\right) \end{array} \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{a} & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-1} & a+1 \end{array}\right) \end{array} \overset{4}{\rightarrow} \begin{cases} a=0 \\ a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{cases} z+2y=1 \\ -y-2x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-2y=1-2+4x=-1+4x \\ y=1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=-1+4\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \overset{5}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} z+2y=1 \\ ay+(a-1)x=-1 \\ (a^2-1)x=a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{a+1}{a^2-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow ay=-1-(a-1)x=-1-1=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{2}{a}} \Rightarrow z=1-2y=1+\frac{4}{a} \Rightarrow \boxed{z=\frac{a+4}{a}}$$

---

[1] 1ªc↔3ªc. Esto supone un cambio de posición de las incógnitas *x* y *z*, que conviene señalar como hemos hecho, pues, de lo contrario, se corre el peligro de olvidarlo luego; por eso no es recomendable esta alternativa, salvo que simplifique los cálculos, como en este caso.

[2] 2ªf-1ªf.

[3] 3ªf+2ªf.

[4] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

[5] 3ªf-2ªf.

EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA A2.

Dados los puntos P(1,-2,3) y Q(3,0,-1), encuentra el punto R que equidista de P y Q y está en la recta

$$r\equiv\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$$

(2 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:

Como el punto R está en la recta r:

$$r\equiv\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}=\alpha \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=4+\alpha\\ y=-1+3\alpha\\ z=3+\alpha\end{cases} \Rightarrow R(4+\alpha,-1+3\alpha,3+\alpha)$$

Como el punto R equidista de P y Q:

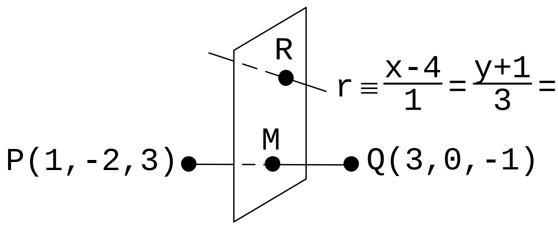
$$d(P,R)=d(Q,R) \Rightarrow \sqrt{(3+\alpha)^2+(1+3\alpha)^2+\alpha^2}=\sqrt{(1+\alpha)^2+(-1+3\alpha)^2+(4+\alpha)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+6\alpha+\alpha^2+1+6\alpha+9\alpha^2+\alpha^2=1+2\alpha+\alpha^2+1-6\alpha+9\alpha^2+16+8\alpha+\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10+12\alpha+11\alpha^2=18+4\alpha+11\alpha^2 \Rightarrow 8\alpha=8 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow R(5,2,4)$$

SEGUNDO MÉTODO:

Si M es el punto medio del segmento PQ: M(2,-1,1).



$$r\equiv\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1} \Rightarrow \begin{cases}x=4+\alpha\\ y=-1+3\alpha\\ z=3+\alpha\end{cases}$$

El plano mediador del segmento PQ (que está formado por todos los puntos que equidistan de P y Q) pasa por M y tiene por vector característico a $\vec{v}=[\overrightarrow{MQ}]=(1,1,-2)$. Por tanto, su ecuación es:

$$x+y-2z+D=0$$

Como M pertenece al plano mediador, satisface su ecuación:

$$2-1-2+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow x+y-2z+1=0$$

Al estar el punto R en la recta r:

$$R(4+\alpha,-1+3\alpha,3+\alpha)$$

Como el punto R está en el plano mediador (ya que equidista de P y Q), satisface su ecuación:

$$4+\alpha-1+3\alpha-6-2\alpha+1=0 \Rightarrow 2\alpha=2 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow R(5,2,4)$$

Extraordinario de 2016. Problema A3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int\frac{x^3-2}{x+3}\cdot dx \qquad y \qquad \int\frac{2}{x^3-x}\cdot dx \qquad \text{(2 Puntos)}$$

Primera integral:

$$\int\frac{x^3-2}{x+3}\cdot dx \stackrel{1}{=} \int\left(x^2-3x+9-\frac{29}{x+3}\right)\cdot dx \stackrel{2}{=} \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-29\cdot\ln|x+3|+C$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2 & x+3 \\ \hline -x^3-3x^2 & x^2-3x+9 \\ \hline -3x^2-2 & \\ 3x^2+9x & \\ \hline 9x-2 & \\ -9x-27 & \\ \hline -29 & \end{array}$$

Comprobación:

$$\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-29\cdot\ln|x+3|\right)'=x^2-3x+9-29\cdot\frac{1}{x+3}=\frac{x^3+3x^2-3x^2-9x+9x+27-29}{x+3}=\frac{x^3-2}{x+3}$$

Segunda integral:

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{2}{x^3-x}=\frac{2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x^3-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=A(x^2-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \Rightarrow 2=-A \Rightarrow A=-2 \\ \text{Si } x=-1 \Rightarrow 2=2B \Rightarrow B=1 \\ \text{Si } x=1 \Rightarrow 2=2C \Rightarrow C=1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int\frac{2}{x^3-x}\cdot dx=\int\frac{-2}{x}\cdot dx+\int\frac{1}{x+1}\cdot dx+\int\frac{1}{x-1}\cdot dx=-2\cdot\int\frac{1}{x}\cdot dx+\int\frac{1}{x+1}\cdot dx+\int\frac{1}{x-1}\cdot dx \stackrel{3}{=}$$

$$=-2\cdot\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

Comprobación:

$$(-2\cdot\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x-1|)'=-2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=$$

$$=\frac{-2(x^2-1)+x(x-1)+x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{-2x^2+2+x^2-x+x^2+x}{x(x^2-1)}=\frac{2}{x^3-x}$$

---

[1] Hacemos primero la división. Esta integral también puede hacerse con el cambio de variable x+3=t.

[2] Las tres primeras integrales son inmediatas de tipo potencial y la última, casi inmediatas de tipo logarítmico.

[3] La primera integral es inmediata de tipo logarítmico y las dos últimas, casi inmediatas del mismo tipo.

EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA A4.

Demuestra que existe $\alpha\in(1,\sqrt{2})$ tal que $f'(\alpha)=1$, siendo $f(x)=\ln \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)$. (3 PUNTOS)

Primero derivamos la función:

$$f'(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)'}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)}=\frac{\frac{\pi}{4}\cdot 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)}=\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)$$

Además, $[1,\sqrt{2}]\subset\mathrm{Dom}(f)$ y $[1,\sqrt{2}]\subset\mathrm{Dom}(f')$:

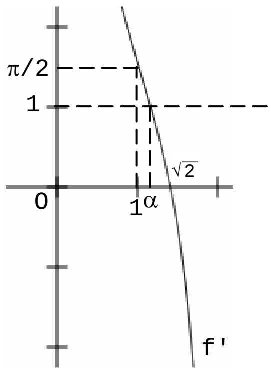
$$1\le x\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ 1\le x^2\le 2\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\cdot x^2\le\frac{\pi}{2}$$

* * *

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux,[1] existe α en el intervalo abierto $(1,\sqrt{2})$ tal que $f'(\alpha)=1$.

En efecto:

1ª) $f'(1)>1>f'(\sqrt{2})$:



- $f'(1)=\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}>1.$
- $f'(\sqrt{2})=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 0=0<1.$

2ª) f' es continua en $[1,\sqrt{2}]$:

- $[1,\sqrt{2}]\subset\mathrm{Dom}(f')$
- Si $a\in[1,\sqrt{2}]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)\right]=\frac{\pi}{2}\cdot a\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot a^2\right)=f'(a)$$

---

[1] Se puede también aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar $g(x)=f'(x)-1$. Si lo intentas, verás que no puede aplicarse a la función f el teorema de Lagrange.

EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B1.

Encuentra todas las matrices B que cumplen $A\cdot B=B\cdot A$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$ (2 puntos)

Evidentemente, B es una matriz cuadrada de orden dos:

$$B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x+z & y+t\\ x+2z & y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y & x+2y\\ z+t & z+2t\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+z=x+y\\ y+t=x+2y\\ x+2z=z+t\\ y+2t=z+2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y-z=0\\ x+y-t=0\\ x+z-t=0\\ y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=z\\ x+z-t=0\\ x+z-t=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=z\\ x=t-z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=b-a\\ y=a\\ z=a\\ t=b\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}b-a & a\\ a & b\end{pmatrix}$$

Comprobación:

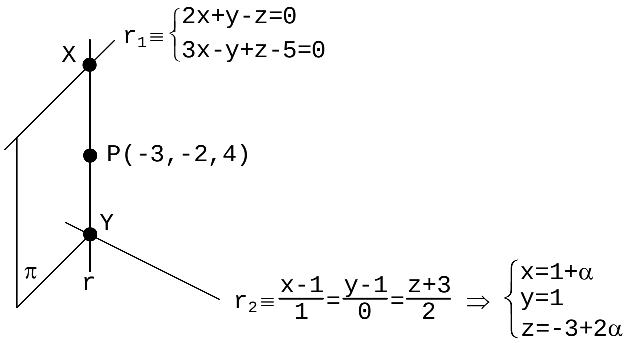
$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b-a & a\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a+b\\ a+b & a+2b\end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}b-a & a\\ a & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a+b\\ a+b & a+2b\end{pmatrix}$$

EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto P(-3,-2,4) y corta a las rectas

$$r_1\equiv\begin{cases}2x+y-z=0\\3x-y+z-5=0\end{cases} \qquad y \qquad r_2\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{2}$$ (3 PUNTOS)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta r con r_1 y r_2, respectivamente:[1]



El punto P y la recta r_1 determinan el plano π. Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r_1, tiene por ecuación:[2]

$$\pi\equiv a(2x+y-z)+b(3x-y+z-5)=0$$

Como el punto P(-3,-2,4) está en el plano π, satisface su ecuación:

$$a(-6-2-4)+b(-9+2+4-5)=0 \Rightarrow -12a-8b=0 \Rightarrow b=-3a/2$$

Por tanto:

$$a(2x+y-z)-\frac{3a}{2}\cdot(3x-y+z-5)=0 \Rightarrow 2a(2x+y-z)-3a(3x-y+z-5)=0 \overset{3}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 4x+2y-2z-9x+3y-3z+15=0 \Rightarrow -5x+5y-5z+15=0 \Rightarrow \pi\equiv x-y+z-3=0$$

Como el punto Y está en la recta r_2:

$$Y(1+\alpha,1,-3+2\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$1+\alpha-1-3+2\alpha-3=0 \Rightarrow 3\alpha-6=0 \Rightarrow 3\alpha=6 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(3,1,1) \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(6,3,-3)=3\cdot(2,1,-1) \Rightarrow r\equiv\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}$$

---

[1] Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

[2] Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta r_1.

[3] Como $a\neq 0$, podemos dividir los dos miembros por a. (Si a fuese 0, entonces b también valdría 0, ya que $b=-3a/2$; pero a y b no pueden ser simultáneamente nulos.)

EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B3.

Demuestra que existe $\alpha\in(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=1/2$, siendo

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{2^{x^2+3x+3}+3\cdot 2^{x+1}+4}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$ (2 Puntos)

Como $g(x)=2^{x^2+3x+3}+3\cdot 2^{x+1}+4>0$ y $h(x)=x^4+x^2+1>0$, entonces $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$:

- Una función exponencial es siempre positiva.
- $x^4+x^2+1=0 \Rightarrow x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$.

Al ser $f=g^{1/4}:h^{1/2}$, su derivada es la siguiente:[1]

$$f'=\frac{(1/4)\cdot g^{-3/4}\cdot g'\cdot h^{1/2}-(1/2)\cdot h^{-1/2}\cdot h'\cdot g^{1/4}}{h}\overset{2}{=}\frac{g'\cdot h-2\cdot h'\cdot g}{4\cdot g^{3/4}\cdot h^{3/2}}$$

Como, $\mathrm{Dom}(g')=\mathrm{Dom}(h')=\mathbb{R}$, $g>0$ y $h>0$, también $\mathrm{Dom}(f')=\mathbb{R}$:

- $g'=(2x+3)\cdot 2^{x^2+3x+3}\cdot \ln 2+3\cdot 2^{x+1}\cdot \ln 2$
- $h'=4x^3+2x$

Por otro lado:

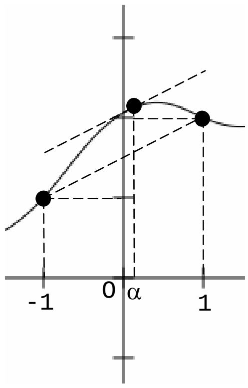
$$f(-1)=\frac{\sqrt[4]{2+3+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$$

$$f(1)=\frac{\sqrt[4]{128+12+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{4}=2$$

* * *

Como la función f satisface en el intervalo $[-1,1]$ las condiciones del teorema de Lagrange, existe α en $(-1,1)$ tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$



En efecto:

1ª) f es continua en $[-1,1]$ por ser derivable en $\mathbb{R}$.

2ª) f es derivable en $(-1,1)$ por serlo en $\mathbb{R}$.

[1] Podemos reducir la derivada de la función a la de sus elementos.

[2] Multiplicamos numerador y denominador por $4\cdot g^{3/4}\cdot h^{1/2}$.

EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B4.

Dadas las funciones $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=2x^3-2x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^3-x \\ y=2x^3-2x \end{cases} \Rightarrow x^3-x=2x^3-2x \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

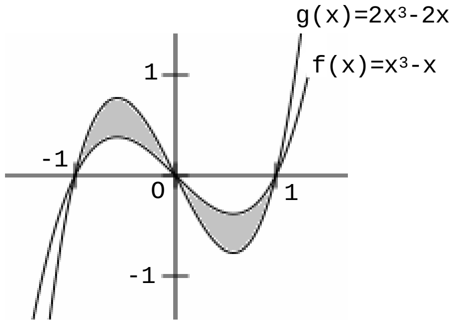
x	f(x)	g(x)
-1/2	3/8	3/4
1/2	-3/8	-3/4

3º) Calculamos el área:[1]

$$A=\int_{-1}^{0}(2x^3-2x-x^3+x)\cdot dx+\int_{0}^{1}(x^3-x-2x^3-2x)\cdot dx =$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\cdot dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\cdot dx =\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} =$$

$$=\left[0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-0\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$



[1] Como las dos funciones son impares, podría calcularse sólo una de las integrales y multiplicar el resultado por dos.