Extraordinario de 2013. Problema A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a^2+a)x+2y+z=2\\(a^2+a)x+(a^2-a)y=4\\(a^2-a-2)y+(a^2-2a-1)z=2\end{cases}$$

(3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a^2+a & 2 & 1 & 2\\a^2+a & a^2-a & 0 & 4\\0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 & 2\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a^2+a & 2 & 1 & 2\\0 & a^2-a-2 & -1 & 2\\0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 & 2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a^2+a} & 2 & 1 & 2\\0 & \mathbf{a^2-a-2} & -1 & 2\\0 & 0 & \mathbf{a^2-2a} & 0\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}\begin{cases}a(a+1)=0 \Rightarrow a=0,\ a=-1\\a^2-a-2=0 \overset{4}{\Rightarrow} (a+1)(a-2)=0 \Rightarrow a=-1,\ a=2\\a(a-2)=0 \Rightarrow a=0,\ a=2\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2\\0 & -2 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

3º) Si a=2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 2 & 1 & 2\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}6x+2y+z=2\\-z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2-3x\\z=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=2-3\alpha\\z=-2\end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a^2+a)x+2y+z=2\\(a^2-a-2)y-z=2\\(a^2-2a)z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{z=0}\Rightarrow(a^2-a-2)y=2\Rightarrow\boxed{y=\frac{2}{a^2-a-2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a^2+a)x=2-2\cdot\frac{2}{a^2-a-2}=2-\frac{4}{a^2-a-2}=\frac{2a^2-2a-8}{a^2-a-2}\Rightarrow\boxed{x=\frac{2a^2-2a-8}{(a^2+a)\cdot(a^2-a-2)}}$$

---

1 2ªf-1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos luego (caso 4º) que despejar.

4 Descomponemos en factores el primer miembro de la ecuación.

5 3ªf+3·2ªf.

6 2ªf+1ªf.

EXTRAORDINARIO DE 2013. PROBLEMA A2.

Encuentra el punto R que pertenece a la recta r y equidista de los puntos P(-1,1,2) y Q(1,3,6):

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{3}$$

(2 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:

Como el punto R está en la recta r, satisface su ecuación:

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{3}=\alpha \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-1+2\alpha\\ y=3-\alpha\\ z=-3+3\alpha\end{cases} \Rightarrow R(-1+2\alpha,3-\alpha,-3+3\alpha)$$

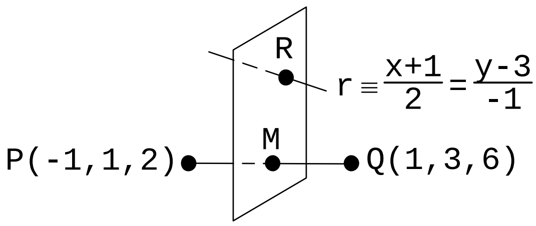
Como el punto R equidista de P y Q:

$$d(R,P)=d(R,Q) \Rightarrow \sqrt{4\alpha^2+(2-\alpha)^2+(-5+3\alpha)^2}=\sqrt{(-2+2\alpha)^2+\alpha^2+(-9+3\alpha)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2+4-4\alpha+\alpha^2+25-30\alpha+9\alpha^2=4-8\alpha+4\alpha^2+\alpha^2+81-54\alpha+9\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 29-34\alpha=85-62\alpha \Rightarrow 28\alpha=56 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow R(3,1,3)$$

SEGUNDO MÉTODO:



$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{3} \Rightarrow \begin{cases}x=-1+2\alpha\\ y=3-\alpha\\ z=-3+3\alpha\end{cases}$$

Si M es el punto medio del segmento PQ: M(0,2,4).

El plano mediador del segmento PQ (que está formado por todos los puntos que equidistan de P y Q) pasa por M y tiene por vector característico a $\vec{v}=[\overrightarrow{MQ}]=(1,1,2)$. Por tanto, su ecuación es:

$$x+y+2z+D=0 \overset{1}{\Rightarrow} 0+2+8+D=0 \Rightarrow D=-10 \Rightarrow x+y+2z-10=0$$

Como el punto R está en la recta r, satisface su ecuación:

$$R(-1+2\alpha,3-\alpha,-3+3\alpha)$$

Como el punto R está en el plano mediador (ya que equidista de P y Q), satisface su ecuación:

$$-1+2\alpha+3-\alpha-6+6\alpha-10=0 \Rightarrow 7\alpha=14 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow R(3,1,3)$$

---

[1] Como M pertenece al plano mediador, satisface su ecuación.

EXTRAORDINARIO DE 2013. PROBLEMA A3.

Halla el valor de $a\in R$ para que la siguiente función sea continua en todo R:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{e^{3-x}} & \text{si } x\le 0\\ (1+x)^{1+a/x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

(2 PUNTOS)

Calculamos los límites laterales en x=0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt{e^{3-x}}=\sqrt{e^3}=e^{3/2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+x)^{1+a/x}\stackrel{1}{=}e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)\cdot(1+x-1)\right]}=$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)\cdot x\right]}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+a)}=e^{a}$$

Ahora bien, para que la función sea continua en R, debe serlo en x=0. Por tanto, a=3/2.

[1] Ya que sale la indeterminación 1^{∞}.

EXTRAORDINARIO DE 2013. PROBLEMA A4.

Dada la función $f(x)=\text{sen}(x\cdot\cos x)$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ tal que $f'(\alpha)=-1$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 PUNTOS)

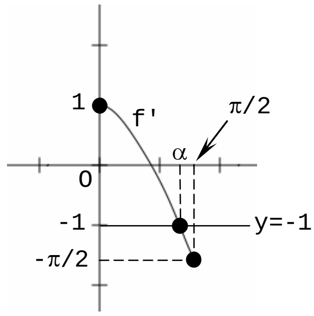
Primero derivamos la función:

$$f'(x)=\cos(x\cdot\cos x)\cdot(x\cdot\cos x)'=\cos(x\cdot\cos x)\cdot(\cos x-x\cdot\text{sen}\, x)$$

* * *

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux,[1] existe α en el intervalo abierto $(0,\pi/2)$ tal que $f'(\alpha)=-1$.

En efecto:



1ª) $f'(0)>-1>f'(\pi/2)$:

- $f'(0)=1$.
- $f'(\pi/2)=1\cdot(-\pi/2)=-\pi/2\simeq-1{,}57$.

2ª) f' es continua en $[0,\pi/2]$:

- $[0,\pi/2]\subset\text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[0,\pi/2]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}[\cos(x\cdot\cos x)\cdot(\cos x-x\cdot\text{sen}\, x)]=$$

$$=\cos(a\cdot\cos a)\cdot(\cos a-a\cdot\text{sen}\, a)=f'(a)$$

[1] Se puede también aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar $g(x)=f'(x)+1$. Si lo intentas, verás que no puede aplicarse a la función f el teorema de Lagrange.

EXTRAORDINARIO DE 2013. PROBLEMA B1.

Dada la matriz A, encuentra todas las matrices B que cumplen A·B=B·A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Evidentemente, B es una matriz cuadrada de orden dos:

$$B=\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & z\\ y & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x-y & z-t\\ x+y & z+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z & -x+z\\ y+t & -y+t\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-y=x+z\\ x+y=y+t\\ z-t=-x+z\\ z+t=-y+t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y+z=0\\ x-t=0\\ x-t=0\\ y+z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-t=0\\ y+z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=-z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=a\\ y=-b\\ z=b\\ t=a\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & b-a\\ a-b & a+b\end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & b-a\\ a-b & a+b\end{pmatrix}$$

EXTRAORDINARIO DE 2013. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}2x+y+z+2=0\\3x+y+2z+1=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x+3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$$ (3 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:

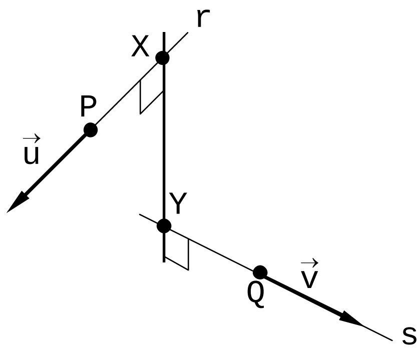
Calculamos primero las ecuaciones paramétricas y las determinaciones lineales de las rectas:

- $r\equiv\begin{cases}2x+y+z=-2\\3x+y+2z=-1\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&-2\\3&1&2&-1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}y&x&z&\end{array}\\\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&-2\\1&3&2&-1\end{array}\right)\end{array}\overset{2}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}y&x&z&\end{array}\\\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&-2\\0&1&1&1\end{array}\right)\end{array}\rightarrow$

  $\rightarrow\begin{cases}y+2x+z=-2\\x+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-3-x\\z=1-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-3-\alpha\\z=1-\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(0,-3,1)\\\vec{u}(1,-1,-1)\end{cases}$

- $s\equiv\frac{x+3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}=\beta\Rightarrow\begin{cases}x=-3+\beta\\y=\beta\\z=-3+2\beta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Q(-3,0,-3)\\\vec{v}(1,1,2)\end{cases}$

Sea XY la recta que andamos buscando:



Por estar el punto X en la recta r: $X(\alpha,-3-\alpha,1-\alpha)$.

Por estar el punto Y en s: $Y(-3+\beta,\beta,-3+2\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(-3-\alpha+\beta,3+\alpha+\beta,-4+\alpha+2\beta)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(1,-1,-1)$ y a $\vec{v}(1,1,2)$:

$$\begin{cases}[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0\\[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3-\alpha+\beta-3-\alpha-\beta+4-\alpha-2\beta=0\\-3-\alpha+\beta+3+\alpha+\beta-8+2\alpha+4\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha+2\beta=-2\\2\alpha+6\beta=8\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3&2&-2\\2&6&8\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\beta&\alpha&\end{array}\\\left(\begin{array}{cc|c}2&3&-2\\6&2&8\end{array}\right)\end{array}\overset{3}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\beta&\alpha&\end{array}\\\left(\begin{array}{cc|c}2&3&-2\\0&-7&14\end{array}\right)\end{array}\rightarrow\begin{cases}2\beta+3\alpha=-2\\-7\alpha=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=2\end{cases}\overset{4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X(-2,-1,3)\\Y(-1,2,1)\end{cases}\Rightarrow[\overrightarrow{XY}]=(1,3,-2)\Rightarrow XY\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$$

---

1 $1^a c\leftrightarrow 2^a c$.

2 $2^a f-1^a f$.

3 $2^a f-3\cdot 1^a f$.

4 Si los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s. Si el sistema es compatible indeterminado, se trata de dos rectas paralelas (los vectores direccionales de r y s te habrán salido colineales), y entonces hay infinitas soluciones.

SEGUNDO MÉTODO:

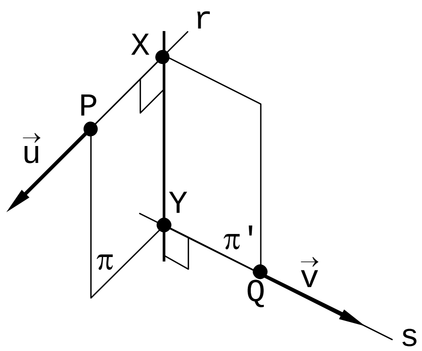
Igual que antes, calculamos primero las ecuaciones paramétricas y las determinaciones lineales de las rectas:

- $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \end{array} \overset{2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow$

  $\rightarrow \begin{cases} y+2x+z=-2 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3-x \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-3-\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0,-3,1) \\ \vec{u}(1,-1,-1) \end{cases}$

- $s \equiv \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{2} = \beta \Rightarrow \begin{cases} x=-3+\beta \\ y=\beta \\ z=-3+2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(-3,0,-3) \\ \vec{v}(1,1,2) \end{cases}$

Sea XY la recta que andamos buscando:



Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a la recta XY, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$$

Por tanto, la ecuación del plano π (determinado por P, $\vec{u}$ y $\vec{w}$) es:

$$\begin{vmatrix} x & y+3 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -5x-(y+3)-4(z-1)=0 \Rightarrow -5x-y-3-4z+4=0 \Rightarrow 5x+y+4z=1$$

Como el punto Y está en la recta s[3]: $Y(-3+\beta,\beta,-3+2\beta)$.

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$5(-3+\beta)+\beta+4(-3+2\beta)=1 \Rightarrow -15+5\beta+\beta-12+8\beta=1 \Rightarrow 14\beta=28 \Rightarrow \beta=2 \Rightarrow Y(-1,2,1)$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$XY \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-2}$$

---

[1] $1^a c \leftrightarrow 2^a c$.

[2] $2^a f - 1^a f$.

[3] En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano π'. La recta XY sería entonces la intersección de los planos π y π'.

EXTRAORDINARIO DE 2013. PROBLEMA B3.

Halla el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot x+\mathrm{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[0,\frac{3}{2}]$.

(2 PUNTOS)

1º) Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo:

$f'(x)=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot\cos(\pi x)$ $\Rightarrow$ f es continua en [0,3/2] por ser derivable en R

Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

2º) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo:

$$f(0)=0;\ f(3/2)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}+\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}-1\simeq 1{,}356$$

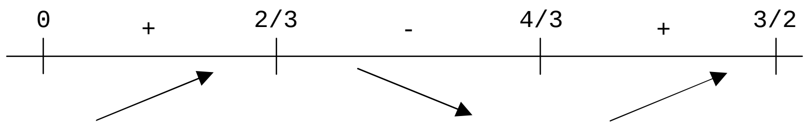
3º) Hallamos los extremos relativos de la función en el intervalo.

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}+\pi\cdot\cos(\pi x)=0 \Rightarrow \cos(\pi x)=-1/2 \Rightarrow \begin{cases}\pi x=2\pi/3+2k\pi\\ \pi x=4\pi/3+2k\pi\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=2/3+2k\\ x=4/3+2k\end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases}x=2/3\\ x=4/3\end{cases}$$

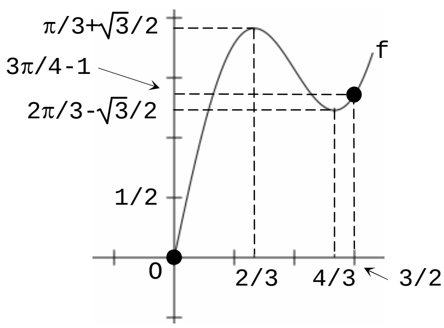
Estudiamos el signo de f' en el intervalo:



Como f es continua en x=2/3 y x=4/3, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera f tiene un máximo relativo en $x=2/3$ que vale $y=f(2/3)=\pi/3+\sqrt{3}/2\simeq 1{,}91$, y un mínimo relativo en $x=4/3$ que vale $y=f(4/3)=2\pi/3-\sqrt{3}/2\simeq 1{,}228$.

4º) Conclusión:

La función tiene un máximo absoluto en $x=2/3$ que vale $y=\pi/3+\sqrt{3}/2$ y un mínimo absoluto en x=0 que vale y=0:



[1] Las demás soluciones no pertenecen al intervalo [0,3/2].

EXTRAORDINARIO DE 2013. PROBLEMA B4.

Dadas las funciones $f(x)=1+ex-x^2$ y $g(x)=e^x$, encuentra los dos puntos en que se cortan y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x).

(3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo la región cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=1+ex-x^2 \\ y=e^x \end{cases} \Rightarrow 1+ex-x^2=e^x \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

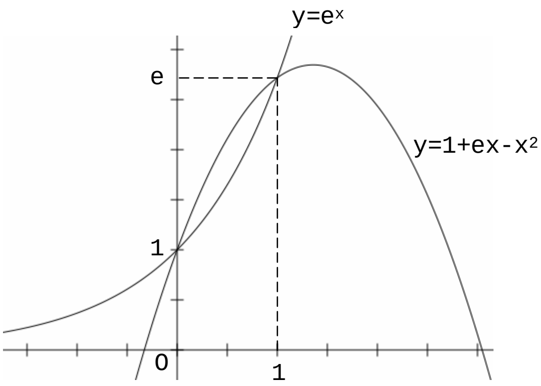
2º) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
$\frac{1}{2}$	$1+\frac{e}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{e}{2}\simeq 2{,}1$	$e^{1/2}\simeq 1{,}6$

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^1 [1+ex-x^2-e^x]\cdot dx \overset{2}{=} \left(x+e\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-e^x\right)_0^1 = \left(1+\frac{e}{2}-\frac{1}{3}-e\right)-(-1)=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{e}{2}+1=\frac{5}{3}-\frac{e}{2}=\frac{10-3e}{6}$$



---

1 Esta ecuación se resuelve a ojo.

2 Las cuatro integrales son inmediatas.