

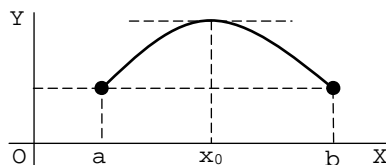
Índice: Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange. Problemas.

1.- Teorema de Rolle

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) y $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos un x_0 en (a,b) tal que $f'(x_0)=0$.

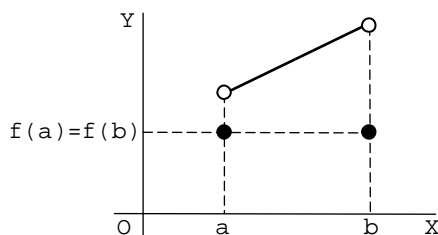
* * *

El teorema asegura la existencia en el intervalo (a,b) de al menos un punto x_0 en el que la tangente es horizontal:



* * *

Es importante recalcar que la función debe ser continua en el intervalo *cerrado* $[a,b]$. La siguiente función es continua en el intervalo *abierto* (a,b) y su derivada no se anula en ningún punto de dicho intervalo:



* * *

Por ejemplo, vamos a demostrar que la ecuación $x^5+2x-1=0$ tiene sólo una solución real.¹

Para verlo, utilizaremos el *método de reducción al absurdo*.²

Supongamos que dicha ecuación tiene más de una solución. Sean a y b ($a < b$) dos de esas soluciones. En ese caso, $a^5+2a-1=0$ y $b^5+2b-1=0$.

Ahora bien, la derivada de la función $f(x)=x^5+2x-1$ es $f'(x)=5x^4+2$. Luego f es continua en el cerrado $[a,b]$ por ser derivable en \mathbb{R} ; es derivable en el abierto (a,b) por serlo en \mathbb{R} , y $f(a)=f(b)=0$. Por tanto, existe c en (a,b) tal que $f'(c)=5c^4+2=0$. Pero $5c^4+2 > 0$. Como ambas cosas no pueden ser ciertas a la vez, la ecuación $x^5+2x-1=0$ sólo tiene una solución real.

¹ Que la ecuación tiene solución, se puede demostrar por el teorema de Bolzano.

² Este método consiste en suponer que es cierto lo contrario de lo que se quiere demostrar, y deducir de ello una contradicción, un absurdo. Lo que nos permite asegurar la verdad de lo que se pretende probar.

2.- Teorema de Lagrange¹

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) , entonces existe al menos un x_0 en (a,b) tal que

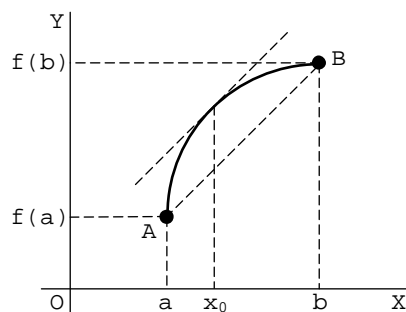
$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* * *

Si A y B son los puntos de coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, respectivamente, entonces $\vec{AB} = (b-a, f(b)-f(a))$. Por tanto, la pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Como $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 , lo que afirma el teorema es que existe en el intervalo (a,b) por lo menos un punto x_0 en el que la recta tangente es paralela a AB :



* * *

Observa que si la función f cumple las condiciones del teorema de Lagrange, entonces la siguiente función auxiliar cumple las condiciones del teorema de Rolle:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

En efecto, si f es continua en $[a,b]$, evidentemente g también;² si f es derivable en (a,b) , también g ; y, por último, $g(a)=g(b)$, como es fácil comprobar.

Esta función nos permite aplicar el teorema de Rolle en lugar del teorema de Lagrange.

* * *

Por ejemplo, dada la siguiente función, vamos a demostrar que

¹ Este teorema se conoce también con el nombre de *teorema del valor medio del cálculo diferencial* o *teorema de los incrementos finitos*.

² Ya que el sustraendo de dicha resta es derivable en \mathbb{R} .

existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $f'(\alpha) = -2$:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - x^2$$

Primero derivamos la función:

- $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)' - 2x = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - 2x$
- $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$

Evidentemente:

1°) f es continua en $[0,2]$ por ser derivable en \mathbb{R} .

2°) f es derivable en $(0,2)$ por serlo en \mathbb{R} .

Como la función f cumple las condiciones del teorema de Lagrange,¹ existe α en $(0,2)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-4 - 0}{2} = -2$$

* * *

Como hemos indicado más arriba, este problema también puede resolverse mediante el teorema de Rolle utilizando la función auxiliar:

$$g(x) = f(x) + 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - x^2 + 2x$$

3.- Problemas

1) Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a cada una de las siguientes funciones. En caso afirmativo, calcula los valores que lo verifican; y en caso negativo, indica qué condición de la hipótesis no cumplen:

- | | |
|---|---|
| a) $y = x^2 - 4x + 11$ en $[1,3]$ | b) $y = x^2 - 5 $ en $[1,3]$ |
| c) $y = \sqrt[3]{x^2}$ en $[-1,1]$ | d) $y = \cos x $ en $[0,\pi]$ |
| e) $y = \sin x $ en $[\pi/2, 3\pi/2]$ | f) $y = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -1/2 \leq x < 1 \\ 5-(x-2)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ |

2) Halla el valor de los parámetros para que las siguientes funciones cumplan el teorema de Rolle y averigua dónde se cumple la tesis:

- | | |
|---|---|
| a) $y = x^3 - 4x + 3$ en $[0,b]$ | b) $y = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ mx + n & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$ |
|---|---|

¹ Si el dato hubiese sido $f'(\alpha) = 0$, habríamos aplicado el teorema de Rolle.

² Aunque este cálculo aparece aquí en último lugar, es el primero que hay que hacer. Si no saliese -2 , se intenta obtener ese resultado probando con valores contenidos en el intervalo $(0,2)$. Si a y b ($a < b$) son dichos valores, se sustituye el intervalo $(0,2)$ por el intervalo (a,b) . En caso de no encontrar esos valores, se puede aplicar la propiedad de Darboux a la función f' o el teorema de Bolzano a la función $f'+2$.

3) La función $f(x)=\sqrt[5]{x^2}-1$ se anula en los extremos del intervalo cerrado $[-1,1]$. Al mismo tiempo es $f'(x)\neq 0$ en $(-1,1)$, en aparente contradicción con el teorema de Rolle. Explica por qué no se verifica la tesis del teorema en este caso.

4) Sin calcular la derivada de $f(x)=x(x+1)(x+2)$, halla cuántas raíces reales tiene la ecuación $f'(x)=0$ y determina los intervalos a los que pertenecen.

5) Prueba que la ecuación $x^3-4x-2=0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(2,3)$.

6) Demuestra que la función $f(x)=e^x+x$ tiene una única raíz.

7) Prueba que la ecuación $x^3-x^2+x-1=0$ tiene una única solución.

8) Estudia si se puede aplicar el teorema de Lagrange a cada una de las siguientes funciones. En caso afirmativo, calcula los valores que lo verifican; y en caso negativo, indica qué condición de la hipótesis no cumplen:

a) $y=x^3-5x^2+3x-2$ en $[0,4]$

b) $y=2x+\operatorname{sen}x$ en $[0,\pi]$

c) $y=x^3-x^2+2$ en $[1,4]$

d) $Y=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si } 4\leq x \end{cases}$ en $[3,5]$

e) $Y=\begin{cases} 1/x & \text{si } -2\leq x<-1 \\ (x^2-3)/2 & \text{si } -1\leq x\leq 0 \end{cases}$

f) $y=\ln(x+1)$ en $[1,2]$ y $[-1,1]$

9) Si $f(x)=(x-2)^2\cdot(x+1)$, halla un número c en $[0,4]$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$$

10) Prueba que la siguiente función satisface las hipótesis del teorema del valor medio y calcula el valor o los valores intermedios vaticinados por el teorema:

$$Y=\begin{cases} (x^2-3)/2 & \text{si } -1\leq x\leq 0 \\ 1/x & \text{si } -2\leq x\leq -1 \end{cases}$$

11) Dada la parábola $y=ax^2+bx+c$, prueba que la cuerda que une los puntos de abscisa x_1 y de abscisa x_2 es paralela a la tangente a la parábola en el punto de abscisa $(x_1+x_2)/2$.

12) Calcula el valor de los parámetros para que las siguientes funciones verifiquen el teorema de Lagrange y halla dónde se cumple la tesis:

a) $Y=\begin{cases} mx+3 & \text{si } 2\leq x<4 \\ -x^2+10x-p & \text{si } 4\leq x\leq 6 \end{cases}$

b) $Y=\begin{cases} x^2+2x+m & \text{si } -3\leq x\leq 0 \\ -x^2+px & \text{si } 0<x\leq 2 \end{cases}$

13) En qué punto de la curva $y=\ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

14) Si $f(x)=x^x$, prueba que existe $\alpha\in(1,6)$ tal que $f'(\alpha)=3$.