1) (3p) Define:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$.

b) Asíntota oblicua en $-\infty$.

c) Funciones equivalentes.

d) Función continua en un punto.

2) (1,6p) Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\sqrt{x+1}-1}$$

3) (1,8p) Halla la ecuación de la asíntota que la siguiente función tiene en $+\infty$:

$$f(x)=x\cdot e^{1/x}$$

4) (1,8p) Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot \ln\frac{1+x}{1-x}$$

5) (1,8p) Dada la siguiente función, prueba que existe $\alpha\in(1,3)$ tal que $f(\alpha)=3/4$. Menciona los resultados teóricos que utilices:

$$f(x)=x^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}$$

Ejercicio 2: *Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:*

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\sqrt{x+1}-1}$$ *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\sqrt{x+1}-1}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{x/2}=\lim_{x\to 0}(2\pi)=2\pi$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\operatorname{sen}(\pi x)\right)=0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{1}{\sqrt{+\infty+1}-1}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $-1\le \operatorname{sen}(\pi x)\le 1$

[1] Ya que, si f es un infinitésimo, $\operatorname{sen} f \sim f$ y $\sqrt[n]{1+f}-1\sim f/n$. También puede hacerse multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, teniendo en cuenta luego que $\operatorname{sen} f\sim f$ si f es un infinitésimo.

Ejercicio 3: *Halla la ecuación de la asíntota que la siguiente función tiene en $+\infty$:*

$$f(x)=x\cdot e^{1/x}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

La recta $y=x+1$ es asíntota oblicua de la función en $+\infty$:

- $k=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1/x}\right)=+\infty\cdot e^{1/+\infty}=+\infty\cdot e^{0}=+\infty\cdot 1=+\infty$
- $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot e^{1/x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}=e^{1/+\infty}=e^{0}=1$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1/x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)\right]\overset{1}{=}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

[1] Ya que $e^{f}-1\sim f$ si f es un infinitésimo.

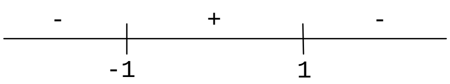
Ejercicio 4: *Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot \ln\frac{1+x}{1-x} \qquad (1,8\ \text{PUNTOS})$$

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=(-1,0)∪(0,1), ya que $x\neq 0$ y el argumento del logaritmo es positivo en (-1,1):



2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in$Dom(f):

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\overset{1}{=}\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{1+a}{1-a}=f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en x=0:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\overset{2}{=}\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}\overset{3}{=}\ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}\overset{4}{=}$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\right]}=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1+x-1+x}{1-x}\right)}=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1-x}\right)}=$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1-x}}=\ln e^{2}\overset{2}{=}2\cdot\ln e=2\cdot 1=2$$

---

1 Para calcular el límite del segundo factor aplicamos la regla del límite de la composición.

2 Por las propiedades de los logaritmos.

3 Aplicamos la regla del límite de la composición.

4 Ya que sale la expresión indeterminada 1^{∞}.

Ejercicio 5: *Dada la siguiente función, prueba que existe $\alpha\in(1,3)$ tal que $f(\alpha)=3/4$. Menciona los resultados teóricos que utilices:*

$$f(x)=x^{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)}$$

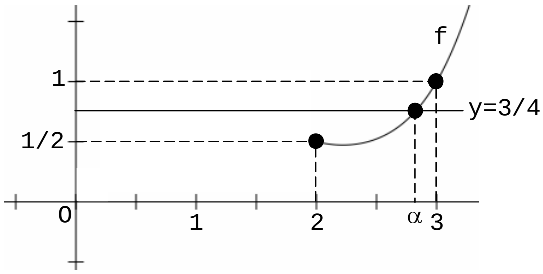
(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Darboux,[1] existe α en[2] (2,3) tal que $f(\alpha)=3/4$.

En efecto:



1ª) $f(2)<3/4<f(3)$:

- $f(2)=2^{-1}=1/2$
- $f(3)=3^0=1$

2ª) f es continua en [2,3]:

- $[2,3]\subset Dom(f) \overset{3}{=} (0,+\infty)$.
- Si $a\in[2,3]$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x^{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)} \overset{4}{=} a^{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot a)}=f(a)$$

[1] También podría hacerse el problema probando que la función auxiliar g(x)=f(x)-3/4 cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

[2] Si α está en (2,3), evidentemente también está en (1,3). Hemos tenido que reducirnos al intervalo (2,3) porque f(1)=1=f(3). También podríamos haber elegido el intervalo (1,2).

[3] Ya que la base de una función potencial-exponencial debe ser positiva.

[4] Para calcular el límite del exponente aplicamos la regla del límite de la composición.