

18 de octubre de 2002.

1) (4p) Define los siguientes conceptos:

- a) Límite de una sucesión.
- b) Límite lateral izquierdo de una función en un punto.
- c) Asíntota horizontal.
- d) Asíntota oblicua.
- e) Función continua en un punto.

2) (2,4p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/\sin x} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \sin x)$$

3) (2,4p) Halla las asíntotas de la función:

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

4) (1,2p) Estudia la continuidad en $x=0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2}/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \operatorname{sen} x)$$

(2,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 36} &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4 - (x-2)}{(x^2 - 36)(2 + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - x}{(x^2 - 36)(2 + \sqrt{x-2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-(x-6)}{(x-6)(x+6)(2 + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-1}{(x+6)(2 + \sqrt{x-2})} = \frac{-1}{12 \cdot 4} = -\frac{1}{48} \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/\operatorname{sen} x} \stackrel{2}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot (1+x-1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}} \stackrel{3}{=} e^1 = e$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \operatorname{sen} x) = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$
- $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

¹ Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador. También puede hacerse con el cambio de variable $x-2=t^2$.

² Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞ .

³ Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$.

Ejercicio 3: Estudia las asíntotas de la función:

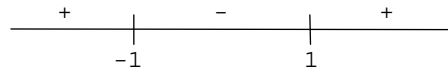
$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

(2,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ya que el signo del argumento del logaritmo es el siguiente:



2º) La recta $x=-1$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \ln \frac{x+1}{x-1} \stackrel{1}{=} \ln \frac{0^-}{-2} = \ln 0^+ = -\infty$$

3º) La recta $x=1$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln \frac{x+1}{x-1} \stackrel{1}{=} \ln \frac{2}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty$$

4º) La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función en $-\infty$ y $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} \stackrel{1}{=} \ln \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} \stackrel{2}{=} \ln \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = \ln \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = \ln 1 = 0$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \ln \frac{x+1}{x-1} - 0 = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que para valores menores que -1 el argumento del logaritmo es menor que 1 , la función se encuentra situada por debajo de la asíntota; y como la diferencia es positiva en $+\infty$, ya que para valores mayores que 1 el argumento del logaritmo es mayor que 1 , la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

¹ Aplicamos la regla del límite de la composición.

² Ya que $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

Ejercicio 4: Estudia la continuidad en $x=0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2}/x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1,2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

La función tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$ (aunque es continua por la derecha en dicho punto):

- $f(0) = 1$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(x + \frac{-x}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x - 1) = -1$

- ~~$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$~~ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x + \frac{|x|}{x} \right) \stackrel{2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(x + \frac{x}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x + 1) = 1$

¹ Ya que $x < 0$.

² Ya que $x > 0$.