

31 de enero de 2008.

1) (1,5p) Enuncia las propiedades de la integral definida.

2) (1,5p) Enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

3) (1,4p) Calcula:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

4) (1,4p) Halla:

$$\int_1^e \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x}$$

5) (1,4p) Calcula:

$$\int \frac{x-1}{x^3-3x^2} \cdot dx$$

6) (1,4p) Dada f' , halla $f(x)$ si $f(3)=1/3$:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

7) (1,4p) Calcula el área de la figura limitada por la curva de Agnesi, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, y la parábola $g(x) = x^2/2$.

Ejercicio 3: Calcula:

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Antes de aplicar el método de integración por partes hacemos el siguiente cambio de variable: $-x^2=t \Rightarrow -2x \cdot dx=dt \Rightarrow x \cdot dx=-dt/2$.

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx &= \int x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot x \cdot dx = \int -t \cdot e^t \cdot (-dt/2) = \frac{1}{2} \cdot \int t \cdot e^t \cdot dt \stackrel{1}{=} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (t \cdot e^t - e^t) + C = \frac{1}{2} \cdot (t-1) \cdot e^t + C \stackrel{2}{=} \frac{1}{2} \cdot (-x^2-1) \cdot e^{-x^2} + C = -\frac{1}{2} \cdot (x^2+1) \cdot e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

S	D	I
+	t	e^t
-	1	e^t
+	0	e^t

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{2} \cdot (x^2+1) e^{-x^2} \right]' &= -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2} \cdot (x^2+1) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = \\ &= -x \cdot e^{-x^2} + x(x^2+1) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (-x+x^3+x) = x^3 \cdot e^{-x^2} \end{aligned}$$

¹ Ahora aplicamos el método de integración por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo exponencial.

² Deshacemos el cambio.

Ejercicio 4: Halla:

$$\int_1^e \frac{\text{sen } \ln x}{x}$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int_1^e \frac{\text{sen } \ln x}{x} \stackrel{1}{=} [-\cos \ln x]_1^e = (-\cos \ln e) - (-\cos \ln 1) = -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1$$

* * *

$$\int \frac{\text{sen } \ln x}{x} \cdot dx = \int \text{sen } \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \stackrel{2}{=} -\cos \ln x + C$$

Comprobación:

$$(-\cos \ln x)' = \text{sen } \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\text{sen } \ln x}{x}$$

¹ La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

² Es una integral casi inmediata de tipo coseno. También puede hacerse por el cambio de variable $\ln x = t$, $(1/x) \cdot dx = dt$.

Ejercicio 5: Calcula:

$$\int \frac{x-1}{x^3-3x^2} \cdot dx$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ doble} \\ x=3 \end{cases}$$

Por tanto:¹

$$\frac{x-1}{x^3-3x^2} = \frac{x-1}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} = \frac{Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2}{x^3(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1=Ax(x-3)+B(x-3)+Cx^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \Rightarrow -1=-3B \Rightarrow B=1/3 \\ \text{Si } x=3 \Rightarrow 2=9C \Rightarrow C=2/9 \\ \text{Si } x=1 \xrightarrow{2} 0=-2A-2/3+2/9 \Rightarrow A=-2/9 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^3-3x^2} \cdot dx &= \int \frac{-2/9}{x} \cdot dx + \int \frac{1/3}{x^2} \cdot dx + \int \frac{2/9}{x-3} \cdot dx = \\ &= -\frac{2}{9} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + \frac{1}{3} \cdot \int x^{-2} \cdot dx + \frac{2}{9} \cdot \int \frac{1}{x-3} \cdot dx \stackrel{3}{=} \\ &= -\frac{2}{9} \cdot \ln|x| + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{2}{9} \cdot \ln|x-3| + C = -\frac{2}{9} \cdot \ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{2}{9} \cdot \ln|x-3| + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2}{9} \cdot \ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{2}{9} \cdot \ln|x-3| \right)' &= -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x} - \frac{-3}{9x^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x-3} = -\frac{2}{9x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{2}{9(x-3)} = \\ &= \frac{-2x(x-3)+3(x-3)+2x^2}{9x^2(x-3)} = \frac{-2x^2+6x+3x-9+2x^2}{9x^2(x-3)} = \frac{9x-9}{9x^2(x-3)} = \frac{9(x-1)}{9x^2(x-3)} = \frac{x-1}{x^3-3x^2} \end{aligned}$$

¹ Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

² Ya que B=1/3 y C=2/9.

³ La primera integral es inmediata de tipo logaritmo, la segunda, inmediata de tipo potencial y la tercera, casi inmediata de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final reduciendo el número de sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 6: Dada f' , halla $f(x)$ si $f(3)=1/3$:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la función f es una primitiva de f' :

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \cdot dx$$

Para eliminar la raíz hacemos el cambio de variable:

$$x+1=t^2 \Rightarrow x=t^2-1 \Rightarrow dx=2t \cdot dt$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t \cdot dt = 2 \cdot \int (t^2-1) \cdot dt \stackrel{1}{=} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C = \frac{2}{3} \cdot t^3 - 2t + C \stackrel{2}{=} \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x+1)^3} - 2 \cdot \sqrt{x+1} + C \stackrel{3}{=} \\ &= \frac{2(x+1) \cdot \sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1}}{3} + C = \frac{\sqrt{x+1} \cdot (2x+2-6)}{3} + C = \frac{2(x-2) \cdot \sqrt{x+1}}{3} + C \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$f(3) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} + C = \frac{1}{3} \Rightarrow C = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{2(x-2) \cdot \sqrt{x+1}}{3} - 1 = \frac{2(x-2) \cdot \sqrt{x+1} - 3}{3}$$

¹ Se trata de integrales inmediatas de tipo potencial.

² Deshacemos el cambio.

³ Ya que $x+1 > 0$.

Ejercicio 7: Calcula el área de la figura limitada por la curva de Agnesi, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, y la parábola $g(x)=x^2/2$.

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=1/(1+x^2) \\ y=x^2/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4+x^2=2 \Rightarrow x^4+x^2-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x^2=-2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 1$$

2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y ₁	y ₂
0	1	0

3º) Calculamos el área:¹

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) \cdot dx \stackrel{2}{=} \left[\arctg x - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1 = \\ &= \left(\arctg 1 - \frac{1}{6} \right) - \left[\arctg(-1) + \frac{1}{6} \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3\pi-2}{6} \end{aligned}$$

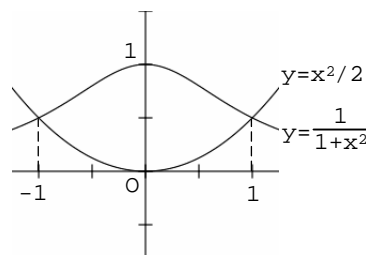
* * *

$$\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) \cdot dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int x^2 \cdot dx \stackrel{3}{=} \arctg x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \arctg x - \frac{x^3}{6} + C$$

Comprobación:

$$\left(\arctg x - \frac{x^3}{6} \right)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3x^2}{6} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}$$

Representación gráfica:



¹ Si se repara en la simetría respecto del eje OY, puede reducirse el cálculo entre 0 y 1, multiplicando luego el resultado por 2.

² La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

³ La primera integral es inmediata de tipo arco tangente y la segunda, inmediata de tipo potencial.