1) (2p) Enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

2) (1,5p) Define los siguientes conceptos:

a) Primitiva de una función.

b) Integral indefinida de una función.

c) Función integral.

3) (0,5p) Demuestra:

$$\int (f+g)=\int f+\int g$$

4) (4,5p) Halla las siguientes integrales:

$$\int \cos^3 x\cdot dx \qquad \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx \qquad \int \frac{x^4+1}{x^3-x}\cdot dx$$

5) (1,5p) Halla el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2\cdot e^x$ y $g(x)=(x+2)\cdot e^x$.

Ejercicio 4: *Halla las siguientes integrales:*

$$\int \cos^3 x\cdot dx \qquad \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx \qquad \int \frac{x^4+1}{x^3-x}\cdot dx$$

(4,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\int \cos^3 x\cdot dx \overset{1}{=} \int \cos x\cdot \cos^2 x\cdot dx = \int \cos x\cdot(1-\mathrm{sen}^2 x)\cdot dx =$$

$$= \int \cos x\cdot dx - \int \mathrm{sen}^2 x\cdot \cos x\cdot dx \overset{2}{=} \mathrm{sen}\, x - \frac{\mathrm{sen}^3 x}{3} + C$$

Comprobación:

$$\left(\mathrm{sen}\, x - \frac{\mathrm{sen}^3 x}{3}\right)' = \cos x - \frac{3\cdot \mathrm{sen}^2 x\cdot \cos x}{3} =$$

$$= \cos x - \mathrm{sen}^2 x\cdot \cos x = \cos x\cdot(1-\mathrm{sen}^2 x) = \cos^3 x$$

b)

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\cdot dx = \int \ln x\cdot x^{-1/2}\cdot dx \overset{3}{=} 2\cdot x^{1/2}\cdot \ln x - 2\cdot \int x^{-1/2}\cdot dx \overset{4}{=}$$

$$= 2\cdot\sqrt{x}\cdot \ln x - 2\cdot \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2\cdot\sqrt{x}\cdot \ln x - 4\cdot\sqrt{x} + C$$

S	D	I
+	$\ln x$	$x^{-1/2}$
-	$1/x$	$\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2\cdot x^{1/2}$

Comprobación:

$$[2\cdot\sqrt{x}\cdot \ln x - 4\cdot\sqrt{x})]' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x + 2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} - 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

c) Como se trata de una integral racional en la que el grado del numerador es mayor que el del denominador, hacemos primero la división:

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^3-x \\ \cline{2-2} -x^4+x^2 & x \\ \hline x^2+1 & \end{array}$$

Por consiguiente:

---

[1] Esta integral puede hacerse por partes, aunque también como sigue.
[2] La primera integral es inmediata de tipo seno y la segunda, casi inmediata de tipo potencial. Esta última también puede hacerse con el cambio de variable $\mathrm{sen}\, x = t$, $\cos x\cdot dx = dt$.
[3] Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.
[4] Se trata de una integral inmediata de tipo potencial.

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x}\cdot dx=\int\left(x+\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)\cdot dx=\int x\cdot dx+\int\frac{x^2+1}{x^3-x}\cdot dx\overset{1}{=}\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2+1}{x^3-x}\cdot dx$$

Para hallar esta última integral, calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)=0\ \Rightarrow\ x=-1,\ x=0,\ x=1$$

Por tanto:[2]

$$\frac{x^2+1}{x^3-x}=\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+1=A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\text{Si } x=0\ \Rightarrow\ 1=-A\ \Rightarrow\ A=-1\\ \text{Si } x=-1\ \Rightarrow\ 2=2B\ \Rightarrow\ B=1\\ \text{Si } x=1\ \Rightarrow\ 2=2C\ \Rightarrow\ C=1\end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int\frac{x^2+1}{x^3-x}\cdot dx=\int\frac{-1}{x}\cdot dx+\int\frac{1}{x+1}\cdot dx+\int\frac{1}{x-1}\cdot dx=-\int\frac{1}{x}\cdot dx+\int\frac{1}{x+1}\cdot dx+\int\frac{1}{x-1}\cdot dx\overset{3}{=}$$

$$=-\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

Por tanto:

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x}\cdot dx=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x-1|\right)'=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=$$

$$=\frac{x^2(x^2-1)-x^2+1+x^2-1+x^2+1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^4+1}{x^3-x}$$

[1] La primera integral es inmediata de tipo potencial.
[2] Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.
[3] La primera integral es inmediata de tipo logaritmo y las otras dos, casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 5: *Halla el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2\cdot e^x$ y $g(x)=(x+2)\cdot e^x$.* (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2\cdot e^x \\ y=(x+2)\cdot e^x \end{cases} \Rightarrow x^2\cdot e^x=(x+2)\cdot e^x \overset{1}{\Rightarrow} x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
0	0	2

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{2}[(x+2)\cdot e^x-x^2\cdot e^x]\cdot dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\cdot e^x\cdot dx \overset{2}{=} [(-x^2+3x-1)\cdot e^x]_{-1}^{2}=$$

$$=[(-4+6-1)\cdot e^2]-[(-1-3-1)\cdot e^{-1}]=e^2+5/e$$

* * *

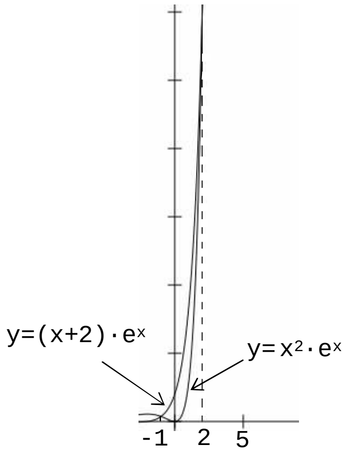
$$\int(-x^2+x+2)\cdot e^x\cdot dx=(-x^2+x+2)\cdot e^x-(-2x+1)\cdot e^x-2\cdot e^x+C=(-x^2+3x-1)\cdot e^x+C$$

S	D	I
+	$-x^2+x+2$	e^x
-	$-2x+1$	e^x
+	-2	e^x
-	0	e^x

Comprobación:

$$[(-x^2+3x-1)\cdot e^x]'=(-2x+3)\cdot e^x+(-x^2+3x-1)\cdot e^x=(-x^2+x+2)\cdot e^x$$

Representación gráfica:



1 Ya que la función exponencial es positiva.

2 Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo exponencial.