1) (4p) Deduce:

a) Las coordenadas del punto medio de un segmento conocidas las de sus extremos.

b) La distancia de un punto a una recta.

2) Dadas las rectas r y s:

a) (0,8p) Estudia su posición relativa.

b) (0,8p) Calcula la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

c) (1,2p) Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en r y s.

d) (0,8p) Calcula la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A(4,0,2).

e) (0,8p) Halla la proyección de punto A sobre la recta s.

f) (0,8p) Calcula la distancia entre r y s.

g) (0,8p) Halla el ángulo que forman r y s.

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z+4=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2t \end{cases}$$

Ejercicio 2: *Dadas las rectas r y s:* ***a)*** *estudia su posición relativa;* ***b)*** *calcula la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s;* ***c)*** *halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en r y s;* ***d)*** *calcula la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A(4,0,2);* ***e)*** *halla la proyección de punto A sobre la recta s;* ***f)*** *calcula la distancia entre r y s;* ***g)*** *halla el ángulo que forman r y s.*

$$r\equiv\begin{cases}x-y+z+4=0\\x+y-z+2=0\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2t\end{cases}$$

(6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$\begin{cases}x-y+z+4=0\\x+y-z+2=0\end{cases}\overset{1}{\Rightarrow}\begin{cases}2x+6=0\\x+y-z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\y=1+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\y=1+\alpha\\z=\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(-3,1,0)\\\vec{u}=(0,1,1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q(0,1,0)\\\vec{v}=(1,1,2)\end{cases}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas. Por tanto, o se cortan o se cruzan:

$$\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{1}{2}$$

Como los vectores $[\overrightarrow{PQ}]=(3,0,0)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son coplanarios, las rectas se cruzan:[2]

$$[[\overrightarrow{PQ}],\vec{u},\vec{v}]=\begin{vmatrix}3&0&0\\0&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=6-3=3\neq0$$

b) Por contener el plano a la recta r y ser paralelo a la recta s, queda determinado por el punto P(-3,1,0) y los vectores direccionales de dichas rectas, $\vec{u}(0,1,1)$ y $\vec{v}(1,1,2)$. Por tanto, su ecuación general es la siguiente:

$$\begin{vmatrix}x+3&y-1&z\\0&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+3+y-1-z=0\Rightarrow x+y-z+2=0$$

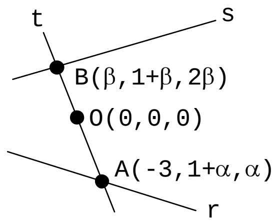
* * *

Otra forma de hacerlo consiste en calcular un vector característico del plano multiplicando vectorialmente $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Con lo que tendríamos la ecuación general de dicho plano, salvo el término independiente, que se calcularía con el punto P.

---

1 A la primera ecuación le sumo la segunda.
2 Otra forma de verlo es comprobando que el sistema de sus ecuaciones es incompatible.

c) La recta t que andamos buscando corta a la recta r en el punto A y a la recta s en el punto B. Como $A\in r$, $A(-3,1+\alpha,\alpha)$; y como $B\in s$, $B(\beta,1+\beta,2\beta)$:



Como los vectores $[\overrightarrow{OA}]=(-3,1+\alpha,\alpha)$ y $[\overrightarrow{OB}]=(\beta,1+\beta,2\beta)$ son colineales, sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{-3}{\beta}=\frac{1+\alpha}{1+\beta}=\frac{\alpha}{2\beta} \Rightarrow \begin{cases}-3-3\beta=\beta+\alpha\beta\\ -6\beta=\alpha\beta\\ 2\beta+2\alpha\beta=\alpha+\alpha\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha\beta=-3-4\beta\\ \alpha\beta=-6\beta\\ \alpha\beta=\alpha-2\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6\beta=-3-4\beta\\ -6\beta=\alpha-2\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\beta=3\\ \alpha=-4\beta\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=3/2\\ \alpha=-6\end{cases}$$

Como estos dos valores satisfacen las tres ecuaciones del sistema, éste es compatible y, por tanto, existe la recta t:[1]

$$\alpha=-6 \Rightarrow [\overrightarrow{OA}]=(-3,-5,-6) \Rightarrow t\equiv\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$$

* * *

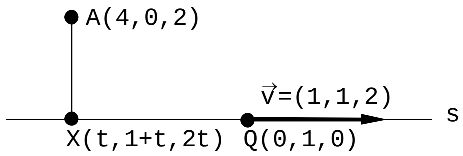
También puede calcularse la recta t como intersección de los dos planos que el punto O determina con las rectas r y s.[2] O calculando el punto A, por ejemplo. Punto que se obtiene por intersección de la recta r con el plano determinado por O y la recta s.

d) El plano perpendicular a la recta r tiene como vector característico el direccional de la recta, $\vec{u}(0,1,1)$. Por tanto, su ecuación es $y+z+D=0$.

Y como dicho plano pasa por el punto A(4,0,2):

$$2+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow y+z-2=0$$

e) Sea X la proyección del punto A sobre la recta s:



---

1 Es posible, aunque improbable en un examen, que tal recta no exista.

2 En este caso, por lo dicho en la nota anterior, es necesario comprobar la solución.

Como X∈s, satisface su ecuación, esto es, X(t,1+t,2t).

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo AXQ:

$$AX^2+QX^2=AQ^2 \Rightarrow (t-4)^2+(1+t)^2+(2t-2)^2+t^2+t^2+4t^2=16+1+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-8t+16+1+2t+t^2+4t^2-8t+4+6t^2=21 \Rightarrow 12t^2-14t=0 \Rightarrow 2t(6t-7)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=7/6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(0,1,0) \\ X(7/6,13/6,7/3) \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} X(7/6,13/6,7/3)$$

* * *

También puede calcularse el parámetro t teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano perpendicular a la recta s que pasa por A;[2] o que el vector $[\overrightarrow{AX}]$ es perpendicular a $\vec{v}$; o considerando que AX es la mínima distancia de A a s. El punto X(x,y,z) puede calcularse también directamente si se repara en que el vector $[\overrightarrow{QX}]$ es la proyección de $[\overrightarrow{QA}]$ sobre $\vec{v}$.

f) Como la recta r pasa por el punto P(-3,1,0) y tiene a $\vec{u}(0,1,1)$ como vector direccional, la recta s pasa por el punto Q(0,1,0) y tiene a $\vec{v}(1,1,2)$ como vector direccional y dichas rectas se cruzan,[3] entonces:

$$d(r,s)=\frac{|[[\overrightarrow{PQ}],\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\|}{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\|}=\frac{|6-3|}{|\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}|}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

g) Como $\vec{u}=(0,1,1)$ y $\vec{v}=(1,1,2)$ son los vectores direccionales de las rectas r y s, respectivamente:

$$\cos(r,s)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|(0,1,1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1+4}}=$$

$$=\frac{|1+2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (r,s)=30^{\circ}$$

[1] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo AQX, siempre sale como una de las soluciones el punto Q de la recta s, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por Q, se obtiene $AQ^2+QQ^2=AQ^2$, esto es, $AQ^2=AQ^2$, lo que siempre es cierto.

[2] Dicho plano tiene por vector característico el direccional de la recta r.

[3] Lo hemos visto en el apartado a.