

23 de mayo de 2003.¹

- 1) Calcula los límites de la siguiente función en 0 y $+\infty$:

$$f(x) = \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x}$$

- 2) Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en $x=0$:

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

- 3) Deriva y simplifica:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

- 4) Calcula el área de la región del plano limitada por la curva $y = \ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=e$.

- 5) Discute según los valores del parámetro y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left. \begin{aligned} ax + ay + (a-1)z &= a-1 \\ ax - z &= 0 \\ ax - az &= -a+1 \end{aligned} \right\}$$

- 6) Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x+1 \end{vmatrix}$$

- 7) Dadas las rectas r y r' , halla la ecuación continua de la que las corta perpendicularmente:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z+3}{-1} \quad r' \equiv \begin{cases} x+y+5z-21=0 \\ x-y-z-3=0 \end{cases}$$

- 8) Dados los puntos $A(-1, 2, -9)$, $B(2, -3, -4)$ y $C(1, 3, -12)$, prueba que son los vértices de un triángulo y halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

¹ Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: Calcula los límites de la siguiente función en 0 y $+\infty$:

$$f(x) = \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x}$$

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} 3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \stackrel{3}{=} 3 + 1 = 4$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x \right) = 3 + 0 = 3$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

¹ La forma más sencilla de hacer este límite es por L'Hôpital, aunque también puede hacerse como sigue.

² Por las propiedades de los límites.

³ Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$.

Ejercicio 2: Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función en $x=0$:

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

* * *

Solución:

Como $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, no tiene sentido preguntar por la derivabilidad de f en $x=0$.

La función f tiene en $x=0$ una discontinuidad de salto finito:

- $f(0)$ no existe

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{e^{1/0^-}}{1+e^{1/0^-}} = \frac{e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} \cdot \left(\frac{1}{e^{1/x}} + 1 \right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\frac{1}{e^{1/x}} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{e^{1/0^+}} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{e^{+\infty}} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

¹ Como sale la indeterminación ∞/∞ , podemos aplicar L'Hôpital (es la forma más sencilla de hacer este límite). También puede hacerse como sigue.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica:

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right)' = \frac{1+\cos x}{1+\cos x+1-\cos x} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)' = \\ &= \frac{1+\cos x}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x (1+\cos x) + \operatorname{sen} x \cdot (1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x (1+\cos x+1-\cos x)}{1+\cos x} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x}{1+\cos x} \stackrel{1}{=} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot (1+\cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cdot \sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cdot |\operatorname{sen} x|} \end{aligned}$$

¹ Ya que $1+\cos x > 0$.

Ejercicio 4: Calcula el área de la región del plano limitada por la curva $y=\ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=e$.

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\ln x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$$

2º) Averiguamos entre 1 y e qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	Y ₁	Y ₂
2	ln 2	0

3º) Calculamos el área:

$$A = \int_1^e [\ln x - 0] \cdot dx = \int_1^e \ln x \cdot dx \stackrel{1}{=} [x \cdot \ln x - x]_1^e =$$

$$= (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 0 + 1 = 1$$

* * *

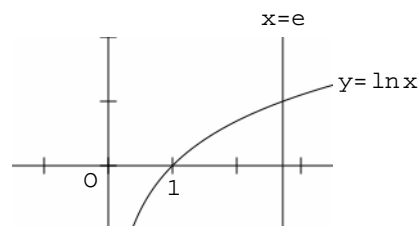
$$\int \ln x \cdot dx \stackrel{2}{=} x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx \stackrel{3}{=} x \cdot \ln x - x + C$$

S	D	I
+	ln x	1
-	1/x	x

Comprobación:

$$[x \cdot \ln x - x]' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Representación gráfica:



¹ La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

² Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

³ Esta integral es inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 5: Discute según los valores del parámetro y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ ax-z=0 \\ ax-az=-a+1 \end{cases}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ a & 0 & -a & -a+1 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ 0 & -a & -a & 1-a \\ 0 & -a & 1-2a & 2-2a \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a-1 & a-1 \\ 0 & -a & -a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a \end{array} \right) \stackrel{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a=0 \\ 1-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=0$, el sistema es incompatible:⁴

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

2º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ -ay-az=1-a \\ (1-a)z=1-a \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1-a}{1-a} \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow -ay=1-a+az=1-a+a=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{a}} \Rightarrow ax=a-1-ay-(a-1)z=a-1+1-a+1=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a}}$$

¹ $2^a f - 1^a f$; $3^a f - 1^a f$.

² $3^a f - 2^a f$.

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

⁴ Ya que la segunda ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x+1 \end{vmatrix}$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x+1 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 4x+1 & x & x & x \\ 4x+1 & x+1 & x & x \\ 4x+1 & x & x+1 & x \\ 4x+1 & x & x & x+1 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \\ = \begin{vmatrix} 4x+1 & x & x & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{3}{=} 4x+1$$

¹ $1^a c + 2^a c + 3^a c + 4^a c$.

² $2^a f - 1^a f$; $3^a f - 1^a f$; $4^a f - 1^a f$.

³ El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 7: Dadas las rectas r y r' , halla la ecuación continua de la que las corta perpendicularmente:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z+3}{-1} \quad r' \equiv \begin{cases} x+y+5z-21=0 \\ x-y-z-3=0 \end{cases}$$

* * *

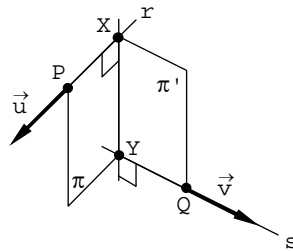
Solución:

Hallamos las ecuaciones paramétricas y una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z+3}{-1} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=8-2\alpha \\ z=-3-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1, 8, -3) \\ \vec{u}(1, -2, -1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5z=21 \\ x-y-z=3 \end{cases} \xrightarrow{1} \begin{cases} 2y+6z=18 \\ x-y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=9-3z \\ x=3+9-3z+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12-2\beta \\ y=9-3\beta \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(12, 9, 0) \\ \vec{v}(-2, -3, 1) \end{cases}$$

Sean X e Y los puntos en los que la recta buscada corta a r y s , respectivamente:²



Por estar el punto X en la recta r : $X(1+\alpha, 8-2\alpha, -3-\alpha)$.

Por estar el punto Y en s : $Y(12-2\beta, 9-3\beta, \beta)$.

Por tanto: $[\vec{XY}] = (11-2\beta-\alpha, 1-3\beta+2\alpha, 3+\beta+\alpha)$.

Como $[\vec{XY}]$ es perpendicular³ a $\vec{u}(1, -2, -1)$ y a $\vec{v}(-2, -3, 1)$:

$$\begin{cases} [\vec{XY}] \cdot \vec{u} = 0 \\ [\vec{XY}] \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11-2\beta-\alpha-2+6\beta-4\alpha-3-\beta-\alpha=0 \\ -22+4\beta+2\alpha-3+9\beta-6\alpha+3+\beta+\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\beta-6\alpha=-6 \\ 14\beta-3\alpha=22 \end{cases} \xrightarrow{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -25\beta=-50 \\ 14\beta-3\alpha=22 \end{cases} \Rightarrow \beta=2 \Rightarrow 28-3\alpha=22 \Rightarrow 3\alpha=6 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(3, 4, -5) \\ Y(8, 3, 2) \end{cases} \Rightarrow [\vec{XY}] = (5, -1, 7) \Rightarrow XY \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+5}{7}$$

¹ A la primera ecuación le resto la segunda.

² Como $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es un vector direccional de la recta XY , ya que ésta es perpendicular a r y a s , otro modo de hallar su ecuación consiste en calcular uno de sus puntos, por ejemplo Y . Este punto se puede obtener por intersección de la recta s y el plano π , plano determinado por el punto P y los vectores \vec{u} y $\vec{u} \wedge \vec{v}$. También puede obtenerse XY como intersección de π y π' .

³ Si en la resolución del sistema que sigue resulta que los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s .

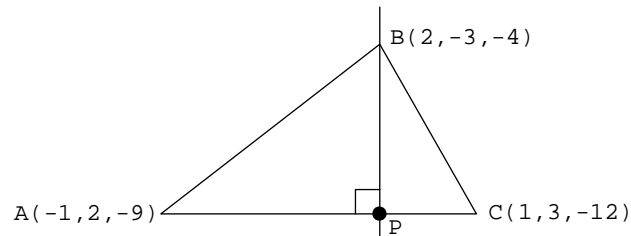
⁴ A la primera ecuación le resto dos veces la segunda.

Ejercicio 8: Dados los puntos $A(-1,2,-9)$, $B(2,-3,-4)$ y $C(1,3,-12)$, prueba que son los vértices de un triángulo y halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

* * *

Solución:

Sea P la proyección de B sobre AC:



Como los vectores $[\vec{AB}]=(3,-5,5)$ y $[\vec{AC}]=(2,1,-3)$ no son colineales, los puntos A, B y C no están alineados. Por tanto, forman triángulo:

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1} \neq \frac{5}{-3}$$

Por otro lado, la longitud del segmento BP coincide con la distancia del punto B a la recta AC:

$$\begin{aligned} d(B,P) = d(B,AC) &= \frac{|[\vec{AB}] \wedge [\vec{AC}]|}{|[\vec{AC}]|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{|10\vec{i}+19\vec{j}+13\vec{k}|}{\sqrt{14}} = \\ &= \frac{\sqrt{100+361+169}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{630}}{\sqrt{14}} = \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5} \end{aligned}$$