

12 de diciembre de 2008.

- 1) (1,6p) Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$$

- 2) (1,6p) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función y estudia la posición relativa:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln(1+x)}$$

- 3) (2p) Encuentra el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en  $x=0$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}(1/x) & \text{si } x < 0 \\ x + \text{sen}(ax) + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 4) (1,6p) De la siguiente función, se pide:

a) La derivada simplificada.

b) La ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

$$f(x) = x^{1/x}$$

- 5) (1,6p) Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas  $(0,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(a,b)$  y  $(0,b)$ . El punto  $(a,b)$  tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación  $y=1/x^2+4$ . De todos esos rectángulos, halla el de área mínima.

- 6) (1,6p) Dada la función  $y=x-2 \cdot \text{arctg}x$ , estudia:

a) La monotonía y los extremos.

b) La concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión.

**Ejercicio 1:** Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$$

(1,6 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

1º)  $\text{Dom}(f) = [-4, 5) \cup (5, +\infty)$ :

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si  $a \in \text{Dom}(f)$ :<sup>1</sup>

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \frac{\sqrt{a+4}-3}{a-5} = f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en  $x=5$ :

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+4}} = \frac{1}{6}$$

<sup>1</sup> Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

<sup>2</sup> Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse multiplicando numerador y denominador por el conjugado del numerador. O con el cambio  $x+4=t^2$ .

**Ejercicio 2:** Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función y estudia la posición relativa:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \quad (1,6 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

1º)  $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$ :

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1+x > 0 \\ \ln(1+x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \\ 1+x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

2º) La recta  $x=0$  es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \stackrel{1}{=} \frac{\ln 0^+}{\ln(1+0^+)} = \frac{-\infty}{\ln(1^+)} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

3º) La recta  $y=1$  es asíntota horizontal de la función en  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(1+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{\ln(1+x)} - 1 = \frac{\ln x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en  $+\infty$ , ya que el numerador es negativo<sup>4</sup> y el denominador positivo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

<sup>1</sup> Para calcular el límite del denominador hemos aplicado la regla del límite de la composición.

<sup>2</sup> Como sale la expresión indeterminada  $\infty/\infty$ , aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado al denominador la regla del límite de la composición.

<sup>3</sup> Como sale la indeterminación  $\infty/\infty$ , aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando  $x$  factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación. O teniendo en cuenta que  $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$  en  $+\infty$  y en  $-\infty$ .

<sup>4</sup> Como  $x < 1+x$ , entonces  $\ln x < \ln(1+x)$ , ya que  $\ln$  es una función creciente.

**Ejercicio 3:** Encuentra el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua y derivable en  $x=0$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}(1/x) & \text{si } x < 0 \\ x + \text{sen}(ax) + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

**1º)** Si la función  $f$  es continua en  $x=0$ , entonces  $b=0$ :

- $f(0) = b$

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( x^2 \cdot \text{sen} \frac{1}{x} \right) \stackrel{1}{=} 0$ ;  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [x + \text{sen}(ax) + b] \stackrel{2}{=} b$

**2º)** Si la función  $f$  es derivable en  $x=0$ , entonces  $a=-1$ :

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{3}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 \cdot \text{sen}(1/x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( x \cdot \text{sen} \frac{1}{x} \right) \stackrel{1}{=} 0$

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{3}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x + \text{sen}(ax)}{x} \stackrel{4}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + a \cdot \cos(ax)}{1} = 1 + a$

\* \* \*

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:<sup>5</sup>

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 \cdot \text{sen}(1/x) - b}{x} \stackrel{6}{=} \frac{-b}{0^-} \stackrel{7}{\Rightarrow} b=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 \cdot \text{sen}(1/x) - b}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( x \cdot \text{sen} \frac{1}{x} \right) \stackrel{1}{=} 0$$

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{3}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x + \text{sen}(ax)}{x} \stackrel{4}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + a \cdot \cos(ax)}{1} = 1 + a$

Si la función es derivable, entonces  $1+a=0$ . Llegamos, pues, al mismo resultado que antes.

<sup>1</sup> Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada.

<sup>2</sup> Para calcular el límite del segundo sumando hemos aplicado la regla del límite de la composición. Lo mismo sucede en los límites que siguen en los que aparece la expresión  $\text{sen}(ax)$  o la expresión  $\cos(ax)$ .

<sup>3</sup> Ya que  $b=0$ .

<sup>4</sup> Como sale la indeterminación  $0/0$ , aplicamos L'Hôpital. También puede efectuarse el cociente,  $1 + \text{sen}(ax)/x$ , aplicar las propiedades de los límites (el límite de una suma es la suma de los límites de los sumandos) y utilizar el hecho de que  $\text{sen} f \sim f$  si  $f$  es un infinitésimo.

<sup>5</sup> Ya que la derivabilidad implica la continuidad.

<sup>6</sup> Ya que el minuendo del numerador es el producto de un infinitésimo por una función acotada.

<sup>7</sup> Si  $b \neq 0$ , este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en  $x=0$ .

**Ejercicio 4:** De la siguiente función, se pide: **a)** su derivada simplificada; **b)** la ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa 1:

$$f(x) = x^{1/x}$$

(1,6 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

**1º)** Hallamos la derivada de la función:

$$\begin{aligned} f(x) = x^{1/x} &\stackrel{1}{=} e^{(1/x) \cdot \ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{(1/x) \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \\ &= x^{1/x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot x^{1/x} \end{aligned}$$

**2º)** Hallamos la ordenada del punto de tangencia:

$$f(1) = 1^1 = 1$$

**3º)** Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} \cdot 1 = 1$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	1

**4º)** Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 1 = x - 1 \Rightarrow y = x$$

<sup>1</sup> Aunque se puede derivar la función por el método de derivación logarítmica, también podemos hacerlo escribiéndola primero como función exponencial de base e.

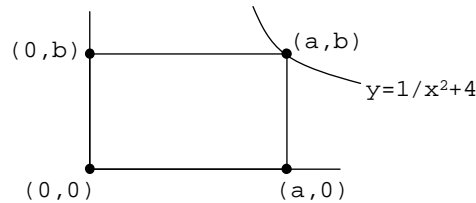
**Ejercicio 5:** Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas  $(0,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(a,b)$  y  $(0,b)$ . El punto  $(a,b)$  tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación  $y=1/x^2+4$ . De todos esos rectángulos, halla el de área mínima.

(1,6 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

El vértice  $(a,b)$  del rectángulo tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación  $y=1/x^2+4$ :



El área del rectángulo es mínima:

$$A = a \cdot b$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable. Ahora bien, como el punto  $(a,b)$  pertenece a la gráfica de la función  $y=1/x^2+4$ , satisface su ecuación:

$$b = \frac{1}{a^2} + 4 \Rightarrow A = a \cdot \left( \frac{1}{a^2} + 4 \right) = \frac{1}{a} + 4a = \frac{1+4a^2}{a}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A' = \frac{8a \cdot a - (1+4a^2)}{a^2} = \frac{8a^2 - 1 - 4a^2}{a^2} = \frac{4a^2 - 1}{a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1/4 \xrightarrow{1} a = 1/2$$

Como<sup>2</sup>  $D = a^2 > 0$ , para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir<sup>3</sup>  $A''$  por  $N'$ , donde  $N = 4a^2 - 1$ :

$$N' = 8a \Rightarrow N'(1/2) = 4 > 0 \Rightarrow A \text{ es mínima en } a = 1/2$$

Por último:

$$a = 1/2 \Rightarrow b = \frac{1}{1/4} + 4 = 4 + 4 = 8$$

<sup>1</sup> Ya que  $a > 0$ .

<sup>2</sup> Designamos por  $D$  al denominador de la derivada y por  $N$  al numerador.

<sup>3</sup> Ya que los signos de  $N'$  y  $A''$  coinciden en  $a = 1/2$ .

**Ejercicio 6:** Dada la función  $y=x-2\cdot\arctg x$ , estudia: **a)** la monotonía y los extremos; **b)** la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión.

(1,6 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

**a)** Para estudiar la monotonía aplicamos el criterio de la derivada primera:

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{1+x^2}$$

<b>Intervalos</b>	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
<b>y' es</b>	+	-	+
<b>y es</b>	creciente	decreciente	creciente

Como la función  $y$  es continua en  $x=-1$  y  $x=1$  (por ser derivable en dichos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera,<sup>1</sup> concluimos que la función tiene un máximo relativo en  $x=-1$  que vale  $y=\pi/2-1$  y un mínimo relativo en  $x=1$  que vale  $y=1-\pi/2$ .

**b)** Para estudiar la curvatura aplicamos el criterio de la derivada segunda:

$$y'' = \frac{2x \cdot (1+x^2) - (x^2-1) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x \cdot (1+x^2-x^2+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

<b>Intervalos</b>	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
<b>y'' es</b>	-	+
<b>y es</b>	cóncava	convexa

Como la función  $y'$  es continua en  $x=0$  (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,<sup>2</sup> concluimos que la función tiene un punto de inflexión en  $x=0$ , cuya ordenada es  $y=0-2\cdot\arctg 0=0$ .

<sup>1</sup> El estudio de los extremos puede hacerse también con el criterio de la derivada segunda.

<sup>2</sup> El estudio de los puntos de inflexión puede hacerse también con el criterio de la derivada tercera.