

1) (2p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x}$$

2) (3p) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3^x + 2}{3^x - 1}$$

3) (2p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

4) (1,5p) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^{x+1}$ en el punto de abscisa 1.

5) (1,5p) Estudia la monotonía y los extremos de la función:

$$f(x) = e^x(x^3 - x - 2)$$

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x} \qquad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:**a)**

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)} \stackrel{1}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} \cdot (x-1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (-1)} = e^{-1} = 1/e$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot (1+\operatorname{sen} x) \right] = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1+\operatorname{sen} x \leq 2$

¹ Ya que sale la expresión indeterminada 1°.

Ejercicio 2: Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{3^x + 2}{3^x - 1}$$

(3 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f) = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$3^x - 1 \neq 0 \Rightarrow 3^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

2º) La recta $x=0$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{3^x + 2}{3^x - 1} = \frac{1 + 2}{0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{3^x + 2}{3^x - 1} = \frac{1 + 2}{0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

3º) Las rectas $y=-2$ e $y=1$ son asíntotas horizontales de la función en $-\infty$ y en $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 2}{3^x - 1} = \frac{3^{-\infty} + 2}{3^{-\infty} - 1} = \frac{0 + 2}{0 - 1} = -2$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{3^x + 2}{3^x - 1} + 2 = \frac{3^x + 2 + 2 \cdot 3^x - 2}{3^x - 1} = \frac{3^x(1 + 2)}{3^x - 1} = \frac{3^{x+1}}{3^x - 1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo¹, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2}{3^x - 1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot \left(1 + \frac{2}{3^x}\right)}{3^x \cdot \left(1 - \frac{1}{3^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{3^x}}{1 - \frac{1}{3^x}} = \frac{1 + \frac{2}{+\infty}}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{3^x + 2}{3^x - 1} - 1 = \frac{3^x + 2 - 3^x + 1}{3^x - 1} = \frac{3}{3^x - 1}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $+\infty$, ya que numerador y denominador son positivos³, la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

¹ El signo del denominador para valores menores que 0 es negativo, ya que $3^x < 1$.

² Como sale la indeterminación ∞/∞ , podemos aplicar L'Hôpital. Es la forma más sencilla de calcular este límite. Aunque también puede hacerse como sigue.

³ El signo del denominador para valores mayores que 0 es positivo, ya que $3^x > 1$.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = \arctan \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right)' = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{(1-\operatorname{tg} x)^2}} \cdot \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg} x) + (1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg} x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{(1-\operatorname{tg} x)^2}} \cdot \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1-\operatorname{tg} x + 1 + \operatorname{tg} x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2} = \\ &= \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1-\operatorname{tg} x)^2 + (1+\operatorname{tg} x)^2} = \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1 - 2 \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1 + 2 \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2+2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2(1+\operatorname{tg}^2 x)} = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4: Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=x^{x+1}$ en el punto de abscisa 1.

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(1) = 1^2 = 1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:¹

$$y = x^{x+1} \stackrel{2}{\Rightarrow} \ln y = (x+1) \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x \cdot \ln x + x + 1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1+x+x \cdot \ln x}{x} \cdot x^{x+1} = (1+x+x \cdot \ln x) \cdot x^x$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(1) = (1+1+\ln 1) \cdot 1^1 = 2$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	2

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-1 = 2 \cdot (x-1) \Rightarrow y-1 = 2x-2 \Rightarrow y = 2x-1$$

¹ Por el método de derivación logarítmica. También puede derivarse escribiéndola como función exponencial de base e.

² Por las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 5: Estudia la monotonía y los extremos de la función:

$$f(x) = e^x(x^3 - x - 2)$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Para estudiar la monotonía utilizamos el criterio de la derivada primera:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^3 - x - 2) + e^x(3x^2 - 1) = e^x(x^3 - x - 2 + 3x^2 - 1) = \\ &= (x^3 + 3x^2 - x - 3)e^x \stackrel{1}{=} (x-1)(x+1)(x+3)e^x \end{aligned}$$

Intervalos	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
f' es	-	+	-	+
f es	decreciente	creciente	decreciente	creciente

Como f es continua en $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$ (por ser derivable en dichos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera,² la función tiene un mínimo en $x=-3$ que vale $y=-26/e^3$, un máximo en $x=-1$ que vale $y=-2/e$ y un mínimo en $x=1$ que vale $y=-2e$.

¹ Descomponemos el polinomio en factores por Ruffini.

² El estudio de los extremos también puede hacerse con el criterio de la derivada segunda.