

JUNIO DE 2011. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2y+a^2z=a+4 \\ ax-y+(a+2)z=1 \\ ax-2y+az=0 \end{cases} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & a^2 & | & a+4 \\ a & -1 & a+2 & | & 1 \\ a & -2 & a & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{1}{\sim} \begin{pmatrix} a & -2 & a & | & 0 \\ a & -1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & 2 & a^2 & | & a+4 \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \begin{pmatrix} a & -2 & a & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & a^2 & | & a+4 \end{pmatrix} \stackrel{3}{\sim} \begin{pmatrix} a & -2 & a & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & | & a+2 \end{pmatrix} \stackrel{4}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=0$, el sistema es incompatible⁵:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -4 & | & 2 \end{pmatrix} \stackrel{6}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 2 \end{pmatrix} \stackrel{7}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & -4 & | & 2 \end{pmatrix} \stackrel{8}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

2º) Si $a=2$, el sistema es incompatible:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

3º) Si $a=-2$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{9}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z=-1+2z-z \\ y=1-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

4º) Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 2$, el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} ax-2y+az=0 \\ y+2z=1 \\ (a^2-4)z=a+2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{a+2}{a^2-4} = \frac{a+2}{(a+2)(a-2)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{a-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1 - 2z = 1 - \frac{2}{a-2} = \frac{a-2-2}{a-2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{a-4}{a-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax = 2y - az = \frac{2a-8}{a-2} - \frac{a}{a-2} = \frac{2a-8-a}{a-2} = \frac{a-8}{a-2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a-8}{a^2-2a}}$$

¹ $1^a f \leftrightarrow 3^a f$.

² $2^a f - 1^a f$.

³ $3^a f - 2 \cdot 2^a f$.

⁴ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

⁵ Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.

⁶ $1^a f \leftrightarrow 2^a f$.

⁷ $2^a f + 2 \cdot 1^a f$.

⁸ $3^a f + 2^a f$.

⁹ $1^a f \cdot (-1/2)$.

JUNIO DE 2011. PROBLEMA A2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que está contenida en el plano $\pi \equiv x+2y-z+2=0$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x+2y-2z=1 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right)_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right)_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y+2z=1-2-2z+2z=-1 \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1+\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(-1, 1, 0) \\ \vec{u}(0, 1, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Sea X el punto de corte de las dos rectas. Por estar en la recta r , $X(-1, 1+\alpha, \alpha)$. Y como la recta buscada está en π , X también⁴:

$$-1+2(1+\alpha)-\alpha+2=0 \Rightarrow -1+2+2\alpha-\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=-3 \Rightarrow X(-1, -2, -3)$$

A continuación puede seguirse uno de los tres⁵ siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como el vector direccional de r , $\vec{u}(0, 1, 1)$, y el vector característico del plano π , $\vec{v}(1, 2, -1)$, son ambos perpendiculares a la recta buscada, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = -(3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

Luego la ecuación continua de la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como la recta buscada es perpendicular a r , está en el plano perpendicular a r que pasa por X . Como $\vec{u}(0, 1, 1)$ es un vector direccional de r , dicho plano es $y+z+D=0$. Y como pasa por $X(-1, -2, -3)$:

$$-2-3+D=0 \Rightarrow D=5 \Rightarrow y+z+5=0$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ y+z+5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2-2y+z=-2+10+2z+z \\ y=-5-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8+3\alpha \\ y=-5-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-8}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}$$

¹ $1^a f \leftrightarrow 2^a f$.

² $2^a f - 2 \cdot 1^a f$.

³ $2^a f \cdot (-1/3)$.

⁴ Dicho de otro modo, X es la intersección de r y π .

⁵ El cuarto método no requiere de los cálculos anteriores.

TERCER MÉTODO:

Calculamos las ecuaciones paramétricas del plano π :

$$x+2y-z+2=0 \Rightarrow x=-2-2y+z \Rightarrow \begin{cases} x=-2-2\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Como los puntos de la recta buscada están en dicho plano, son de la forma $Y(-2-2\alpha+\beta, \alpha, \beta)$. Por tanto, $[\vec{XY}] = (-1-2\alpha+\beta, 2+\alpha, 3+\beta)$.

Como la recta r y la recta buscada se cortan perpendicularmente:

$$[\vec{XY}] \perp \vec{u} \Rightarrow [\vec{XY}] \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2+\alpha+3+\beta=0 \Rightarrow \beta=-5-\alpha$$

Sustituyendo arriba, queda:

$$\begin{cases} x=-2-2\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-2\alpha-5-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-5-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=-5-\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x+7}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{-1}$$

CUARTO MÉTODO:

La ecuación de la recta buscada es¹:

$$\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ a(2x+y-z+1)+b(x+2y-2z-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ (2a+b)x+(a+2b)y+(-a-2b)z=-a+b \end{cases}$$

Un vector direccional de esta recta es:

$$\vec{x} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2a+b & a+2b & -a-2b \end{vmatrix} = (-2a-4b+a+2b, a+2b-2a-b, a+2b-4a-2b) = (-a-2b, -a+b, -3a)$$

Un vector direccional de r es:

$$\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0, 3, 3)$$

Como las rectas son perpendiculares:

$$(-a-2b, -a+b, -3a) \cdot (0, 3, 3) = 0 \Rightarrow -3a+3b-9a=0 \Rightarrow 3b=12a \Rightarrow b=4a$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x+2y-z=-2 \\ (2a+b)x+(a+2b)y+(-a-2b)z=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ 6ax+9ay-9az=3a \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 6a & 9a & -9a & 3a \end{array} \right) \sim$$

$$\stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x=-2-2y+z \\ y=-5-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8+3\alpha \\ y=-5-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-8}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}$$

¹ Ya que, al cortar a r , se encuentra también en uno de los planos del haz de arista r .

² $2^a f \cdot 1 / (3a)$, ya que $a \neq 0$.

³ $2^a f - 2 \cdot 1^a f$.

JUNIO DE 2011. PROBLEMA A3.

Halla las integrales indefinidas:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \cdot dx \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

PRIMERA INTEGRAL:

Como $(\operatorname{tg}^2 x - 1)' = 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2 \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x)$, se trata de una integral casi inmediata de tipo logarítmico¹:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x - 1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \ln |\operatorname{tg}^2 x - 1| + C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \ln |\operatorname{tg}^2 x - 1| \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)'}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + x - 2} &= \frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A \cdot (x-1) + B \cdot (x+2)}{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &= A \cdot (x-1) + B \cdot (x+2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = -2 \Rightarrow 1 = -3A \Rightarrow A = -1/3 \\ \text{Si } x = 1 \Rightarrow 1 = 3B \Rightarrow B = 1/3 \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} &= \int \frac{-1/3}{x+2} \cdot dx + \int \frac{1/3}{x-1} \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \ln |x+2| + \frac{1}{3} \cdot \ln |x-1| + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{3} \cdot \ln |x+2| + \frac{1}{3} \cdot \ln |x-1| \right)' = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{-x+1+x+2}{3(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

¹ También puede hacerse mediante el cambio de variable $\operatorname{tg}^2 x - 1 = t$. O con el cambio $\operatorname{tg} x = t$, pero, en este caso, resulta un poco largo pues aparece una integral racional.

² Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.

JUNIO DE 2011. PROBLEMA A4.

Dada la función $f(x)=\sqrt{2+\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x+1})+\operatorname{sen}\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 PUNTOS)

Como $\operatorname{sen}(\pi-a)=\operatorname{sena}$, se puede simplificar algo la función:

- $f(x)=\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}$

- $\operatorname{Dom}(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, ya que el radicando no es negativo pues la suma de ambos senos es mayor o igual que -2 (recuerda que el seno de un ángulo está entre -1 y 1).

* * *

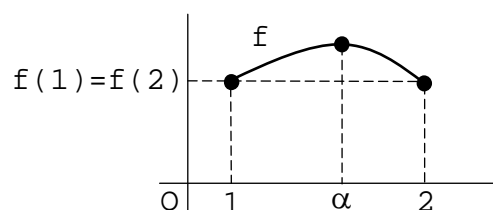
Como la función f satisface las condiciones del **teorema de Rolle**¹, existe α en $(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f(1)=f(2)$:

- $f(1)=\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{2}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{3}}$

- $f(2)=\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{3}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{2}}$



2ª) f es continua en $[1,2]$ por ser derivable² en $[1,2]$.

3ª) f es derivable en $(1,2)$ por serlo en $[1,2]$.

NOTA:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 + \operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1} + \operatorname{sen}\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}}} \cdot \left(2 + \operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1} + \operatorname{sen}\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \right)' =$$

$$= \frac{\cos\sqrt[3]{x+1} \cdot [(x+1)^{1/3}]' + \cos\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \cdot \left[\left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1/3} \right]'}{2 \cdot \sqrt{2 + \operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1} + \operatorname{sen}\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}}} =$$

$$= \frac{\cos\sqrt[3]{x+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot (x+1)^{-2/3} + \cos\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-2/3} \cdot \left(1 + \frac{2}{x} \right)'}{2 \cdot \sqrt{2 + \operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1} + \operatorname{sen}\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}}} =$$

¹ Podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones del **teorema de Bolzano**, pero resulta más complicado.

² Ver la nota que aparece a continuación.

$$\frac{\cos\sqrt[3]{x+1}}{3 \cdot (x+1)^{2/3}} + \frac{\cos\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right)}{3 \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)^{2/3}} = \frac{\cos\sqrt[3]{x+1}}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{2 \cdot \cos\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt[3]{x+1}}{2 \cdot \sqrt{2+\sin\sqrt[3]{x+1}+\sin\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}} = \frac{\cos\sqrt[3]{x+1}}{2 \cdot \sqrt{2+\sin\sqrt[3]{x+1}+\sin\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}}$$

Por anularse algún denominador, los números 0, -1 y -2 no pertenecen al dominio de f' . Pero ninguno de ellos afecta al intervalo que estamos estudiando.

Por otro lado, hay que ver qué sucede en dicho intervalo con la raíz del denominador:

- $1 \leq x \leq 2 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2 \leq x+1 \leq 3 \stackrel{2}{\Rightarrow} \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{x+1} \leq \sqrt[3]{3} \stackrel{3}{\Rightarrow} \sqrt[3]{x+1} \in (0, \pi/2) \stackrel{4}{\Rightarrow} \sin\sqrt[3]{x+1} > 0.$
- $1 \leq x \leq 2 \stackrel{5}{\Rightarrow} 1/2 \leq 1/x \leq 1 \stackrel{6}{\Rightarrow} 1 \leq 2/x \leq 2 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2 \leq 1+2/x \leq 3 \stackrel{2}{\Rightarrow} \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \leq \sqrt[3]{3} \Rightarrow$
 $\stackrel{3}{\Rightarrow} \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \in (0, \pi/2) \stackrel{4}{\Rightarrow} \sin\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} > 0$

Por tanto, $[1, 2] \subset \text{Dom}(f')$.

¹ Sumo 1 a cada miembro de la desigualdad.

² La función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ es creciente.

³ Aproximadamente: $\sqrt[3]{2}=1,26$ rad, $\sqrt[3]{3}=1,44$ rad y $\pi/2=1,57$ rad.

⁴ El seno de los ángulos del primer cuadrante es positivo.

⁵ Si un número está entre 1 y 2, su inverso está entre 1/2 y 1.

⁶ Multiplico por 2 a cada miembro de la desigualdad.

JUNIO DE 2011. PROBLEMA B1.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices G que cumplan $AG=GA$.

(2 puntos)

Evidentemente, G es una matriz cuadrada de orden 2:

$$G = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} A \cdot G = G \cdot A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & z \\ 2y & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2z \\ y & 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=x \\ 2y=y \\ z=2z \\ 2t=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ 0 \cdot t=0 \end{cases} \stackrel{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=0 \\ t=\beta \end{cases} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}$$

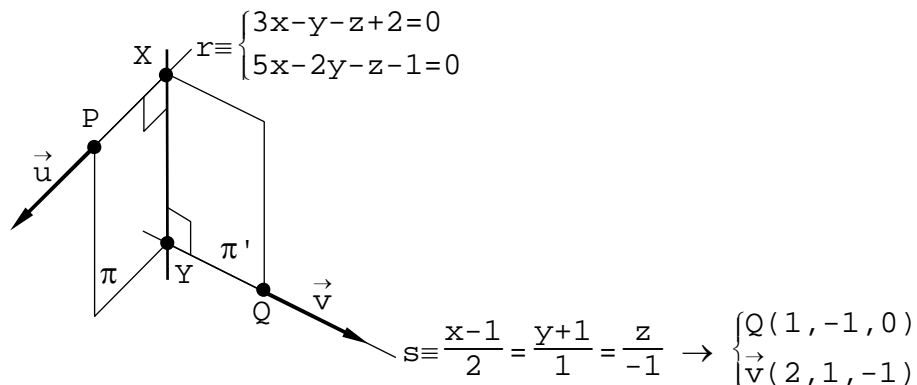
¹ Las ecuaciones primera y cuarta son triviales: x y t pueden tomar cualquier valor.

JUNIO DE 2011. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y - z + 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r :



$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y - z = -2 \\ 5x - 2y - z = 1 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 3x - y - z = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} z = 2 + 3x - y = 2 + 3x + 3 - 2x \\ y = -3 + 2x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -3 + 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0, -3, 5) \\ \vec{u}(1, 2, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

A continuación puede seguirse uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Por estar el punto X en la recta r : $X(\alpha, -3 + 2\alpha, 5 + \alpha)$.

Por estar el punto Y en la recta s : $Y(1 + 2\beta, -1 + \beta, -\beta)$.

Por tanto: $[\vec{XY}] = (1 + 2\beta - \alpha, 2 + \beta - 2\alpha, -5 - \beta - \alpha)$.

Como $[\vec{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(1, 2, 1)$ y a $\vec{v}(2, 1, -1)$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} [\vec{XY}] \cdot \vec{u} = 0 \\ [\vec{XY}] \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\beta - \alpha + 4 + 2\beta - 4\alpha - 5 - \beta - \alpha = 0 \\ 2 + 4\beta - 2\alpha + 2 + \beta - 2\alpha + 5 + \beta + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha - 3\beta = 0 \\ 3\alpha - 6\beta = 9 \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & | & 0 \\ 3 & -6 & | & 9 \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & -3 & | & 0 \\ -9 & 0 & | & 9 \end{pmatrix} \stackrel{3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \\ \stackrel{4}{\Rightarrow} \begin{cases} X(-1, -5, 4) \\ Y(-3, -3, 2) \end{cases} &\Rightarrow [\vec{XY}] = (-2, 2, -2) \Rightarrow XY \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{1} \end{aligned}$$

¹ $2^af - 1^af$.

² $2^af - 2 \cdot 1^af$.

³ $1^af \cdot 1/3$; $2^af \cdot (-1/9)$.

⁴ Si resultara que los puntos X e Y coinciden, eso significaría que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s .

SEGUNDO MÉTODO:

Como los vectores \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares a la recta que buscamos, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} = -3(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x & y+3 & z-5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 3(z-5) = 0 \Rightarrow x - z + 5 = 0$$

Como el punto Y está en la recta s^1 : $Y(1+2\beta, -1+\beta, -\beta)$.

Como el punto Y está en el plano π , satisface su ecuación:

$$1 + 2\beta + \beta + 5 = 0 \Rightarrow 3\beta = -6 \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow Y(-3, -3, 2)$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$XY \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

¹ En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano π' . Entonces la recta XY sería la intersección de los planos π y π' .

JUNIO DE 2011. PROBLEMA B3.

Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=\cos x+\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[\pi/2,3\pi/2]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

1º) Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo:

$$f(x)=\cos x+\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen} x+\cos x \Rightarrow \operatorname{Dom}(f')=\mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow f \text{ es continua en } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ es continua en } [\pi/2,3\pi/2]$$

Por el **teorema de Weierstrass** la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

2º) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo:

$$f(\pi/2)=\cos(\pi/2)+\operatorname{sen}(\pi/2)=0+1=1 \\ f(3\pi/2)=\cos(3\pi/2)+\operatorname{sen}(3\pi/2)=0-1=-1$$

3º) Hallamos los extremos relativos de la función en el intervalo:

Como la **condición necesaria de extremo relativo** es que la derivada valga cero:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \cos x-\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x=\cos x \Rightarrow x=\pi/4+k\pi$$

El único de estos valores que pertenece al intervalo que estamos considerando es $x=5\pi/4$.

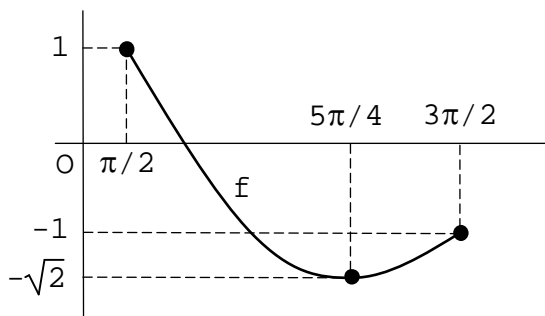
Estudiamos el signo de f' en el intervalo:



Como f es continua en $x=5\pi/4$, por el **criterio de la variación del signo de la derivada primera** f tiene un mínimo relativo en $x=5\pi/4$ que vale $f(5\pi/4)=\cos(5\pi/4)+\operatorname{sen}(5\pi/4)=-\sqrt{2}/2-\sqrt{2}/2=-\sqrt{2}$.

4º) Conclusión:

La función f tiene en $x=\pi/2$ un máximo absoluto que vale $y=1$; y en $x=5\pi/4$ un mínimo absoluto que vale $y=-\sqrt{2}$:



JUNIO DE 2011. PROBLEMA B4.

Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ y $g(x)=\frac{1-x^2}{2}$. (Observa que $f(x)$ es la parte no negativa de la circunferencia de centro el origen y radio 1.) (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=(1-x^2)/2 \end{cases} &\Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{1-x^2}{2} \Rightarrow 2\cdot\sqrt{1-x^2}=1-x^2 \Rightarrow 4(1-x^2)=(1-x^2)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1-x^2)^2-4(1-x^2)=0 \Rightarrow (1-x^2)[1-x^2-4]=0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ -3-x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x^2=-3 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 1 \end{aligned}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
0	1	1/2

3º) Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) \cdot dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 (1-x^2) \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} \right)_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3\pi-4}{6} \end{aligned}$$

¹ La primera integral es el área de una semicircunferencia: $\pi/2$. Eso es lo que se nos dice en la observación. También puede hacerse esa integral con los cambios de variable $\sin x=t$ o $\cos x=t$. La segunda integral es inmediata.