

JUNIO DE 2009. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+ay+az=2a+1 \\ x+y+(a^3-2a)z=a-1 \end{cases} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{array} \right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a+1 \\ 0 & 0 & a^3-a & a-1 \end{array} \right) \xrightarrow{2} \begin{cases} a+1=0 \\ a(a^2-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=0, a=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-1$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

2º) Si $a=0$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

3º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro³:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z=-3/2+z \\ y=3/2 \\ z=\alpha \end{cases}$$

4º) Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$, el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+y-az=0 \\ (a+1)y=2a+1 \\ a(a-1)(a+1)z=a-1 \end{cases} \xrightarrow{4} z = \frac{a-1}{a(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a(a+1)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{a^2+a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)y=2a+1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{2a+1}{a+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -y + az = -\frac{2a+1}{a+1} + \frac{a}{a(a+1)} = \frac{-2a-1}{a+1} + \frac{1}{a+1} = \frac{-2a-1+1}{a+1} = \frac{-2a}{a+1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-2a}{a+1}}$$

¹ $2^a f + 1^a f$; $3^a f - 1^a f$.

² Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

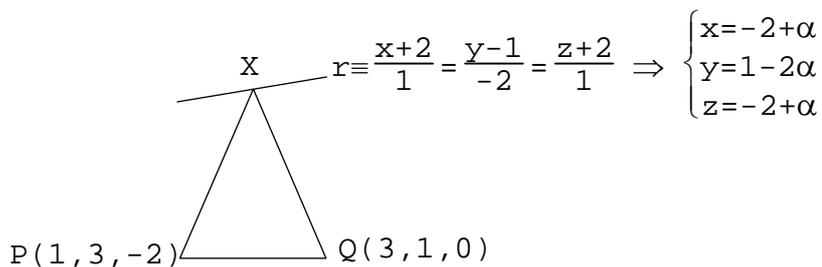
³ Ya que es un sistema con tres incógnitas y dos ecuaciones fundamentales.

⁴ Como ya se han estudiado los casos en los que se anulan los coeficientes de las incógnitas que vamos a despejar ahora, podemos hacer esto tranquilamente.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA A2.

Encuentra el punto de la recta $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ que forma triángulo isósceles con los puntos $P(1,3,-2)$ y $Q(3,1,0)$. (2 Puntos)

PRIMER MÉTODO:



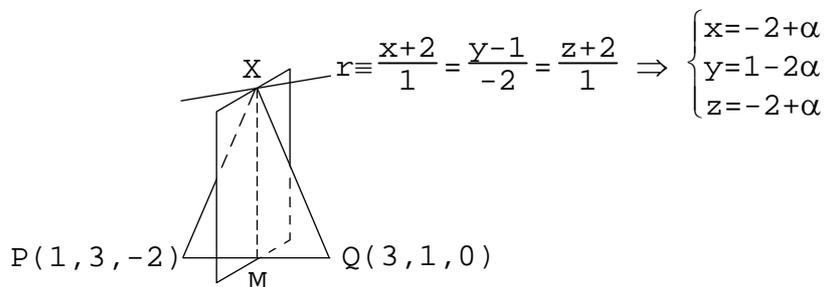
Sea X el punto de la recta que andamos buscando:

$$X(-2+\alpha, 1-2\alpha, -2+\alpha)$$

Como dicho punto equidista de P y Q¹:

$$\begin{aligned} d(X,P) &= d(X,Q) \Rightarrow \sqrt{(3-\alpha)^2 + (2+2\alpha)^2 + (-\alpha)^2} = \sqrt{(5-\alpha)^2 + (2\alpha)^2 + (2-\alpha)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 4 + 8\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^2 = 25 - 10\alpha + \alpha^2 + 4\alpha^2 + 4 - 4\alpha + \alpha^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 13 + 2\alpha = 29 - 14\alpha \Rightarrow 16\alpha = 16 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow X(-1, -1, -1) \end{aligned}$$

SEGUNDO MÉTODO:



Si M es el punto medio del segmento PQ: $M(2,2,-1)$.

El plano mediador del segmento PQ (que está formado por todos los puntos que equidistan de P y Q) pasa por M y tiene por vector característico a $\vec{v} = [\vec{PQ}] = (2, -2, 2) = 2(1, -1, 1)$. Por tanto, su ecuación es:

$$x - y + z + D = 0 \Rightarrow 2 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow x - y + z + 1 = 0$$

Como el punto X está en este plano, satisface su ecuación:

$$-2 + \alpha - 1 + 2\alpha - 2 + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow X(-1, -1, -1)$$

¹ Aunque hay una cierta ambigüedad en el enunciado, parece que los lados iguales del triángulo son XP y XQ.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA B1.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, calcula A^3 y A^{38} .

(2 PUNTOS)

Calculamos las primeras potencias de A:

- $A^1 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
- $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Por tanto:

$$A^{38} = A^3 \cdot 12 + 2 = (A^3)^{12} \cdot A^2 = (I)^{12} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

JUNIO DE 2009. PROBLEMA B2.

Halla la ecuación continua de la recta que es perpendicular¹ a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+3y-z+8=0 \\ x+4y-2z+12=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-2} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

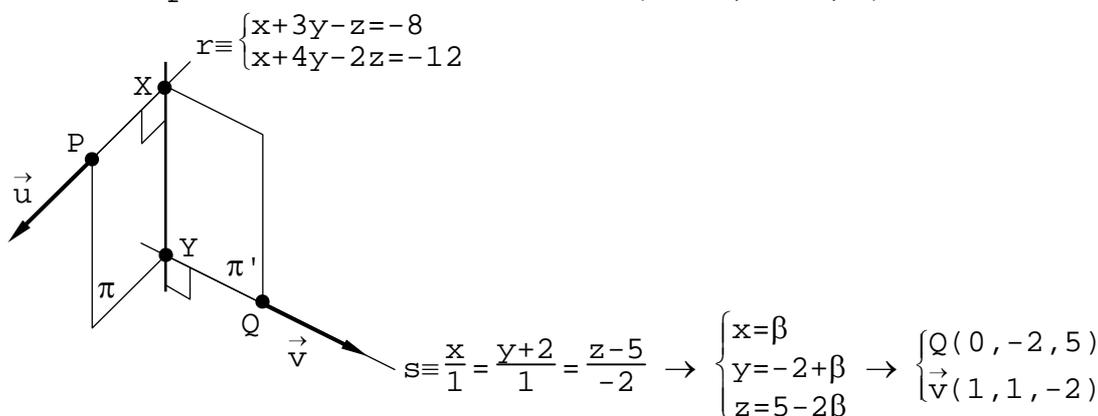
$$\begin{cases} x+3y-z=-8 \\ x+4y-2z=-12 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & -2 & -12 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+3y-z=-8 \\ y-z=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-8+12-3z+z \\ y=-4+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-2\alpha \\ y=-4+\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(4, -4, 0) \\ \vec{u}(-2, 1, 1) \end{cases}$$

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Por estar el punto X en la recta r: $X(4-2\alpha, -4+\alpha, \alpha)$.



Por estar el punto Y en s: $Y(\beta, -2+\beta, 5-2\beta)$.

Por tanto: $[\vec{XY}] = (\beta-4+2\alpha, 2+\beta-\alpha, 5-2\beta-\alpha)$.

Como $[\vec{XY}]$ es perpendicular³ a $\vec{u}(-2, 1, 1)$ y a $\vec{v}(1, 1, -2)$:

$$\begin{cases} [\vec{XY}] \cdot \vec{u} = 0 \\ [\vec{XY}] \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta+8-4\alpha+2+\beta-\alpha+5-2\beta-\alpha=0 \\ \beta-4+2\alpha+2+\beta-\alpha-10+4\beta+2\alpha=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6\alpha-3\beta=-15 \\ 3\alpha+6\beta=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=5 \\ \alpha+2\beta=4 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=4 \\ -3\beta=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(0, -2, 2) \\ Y(1, -1, 3) \end{cases} \Rightarrow [\vec{XY}] = (1, 1, 1) \Rightarrow XY \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

¹ Debería decir "que corta perpendicularmente".

² 2^{af}-1^{af}.

³ Si en la resolución del sistema que sigue resulta que los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s.

⁴ 2^{af}-2·1^{af}.

SEGUNDO MÉTODO:

Como los vectores \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares a la recta que buscamos, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} = -3(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(y+4) - 3z = 0 \Rightarrow y+4 - z = 0 \Rightarrow y - z + 4 = 0$$

Como Y está en la recta s^1 : $Y(\beta, -2+\beta, 5-2\beta)$.

Como Y está en el plano π , satisface su ecuación:

$$-2 + \beta - 5 + 2\beta + 4 = 0 \Rightarrow 3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow Y(1, -1, 3)$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$XY \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

¹ En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano π' . La recta XY sería entonces la intersección de este plano y el plano π .

JUNIO DE 2009. PROBLEMA C1.

Halla las integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{x^2-2x+2} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

PRIMERA INTEGRAL:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2+4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-2x-3} &= \frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A \cdot (x-3) + B \cdot (x+1)}{x^2-2x-3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &= A \cdot (x-3) + B \cdot (x+1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=-1 \Rightarrow 1=-4A \Rightarrow A=-1/4 \\ \text{Si } x=3 \Rightarrow 1=4B \Rightarrow B=1/4 \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-2x-3} &= \int \frac{-1/4}{x+1} \cdot dx + \int \frac{1/4}{x-3} \cdot dx = -\frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x+1} \cdot dx + \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{x-3} \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \ln|x+1| + \frac{1}{4} \cdot \ln|x-3| + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{4} \cdot \ln|x+1| + \frac{1}{4} \cdot \ln|x-3| \right)' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{-x+3+x+1}{4(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x^2-2x-3}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-2x+2=0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow \text{las raíces son complejas} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1^2 \Rightarrow \text{hacemos el cambio } \begin{cases} x-1=t \\ dx=dt \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} \stackrel{2}{=} \arctg t + C = \arctg(x-1) + C$$

Comprobación:

$$[\arctg(x-1)]' = \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

¹ Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.

² La integral es inmediata de tipo arco tangente.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA C2.

Demuestra que la función $f(x)=\ln(1+x\cdot\text{sen } x)$ tiene un máximo relativo en $(\pi/2,\pi)$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (3 PUNTOS)

1º) Como la **condición necesaria de extremo relativo** es que la derivada valga cero, se considera la función¹:

$$f'(x) = \frac{\text{sen } x + x \cdot \cos x}{1 + x \cdot \text{sen } x}$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del **teorema de Bolzano**, existe α en $(\pi/2,\pi)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

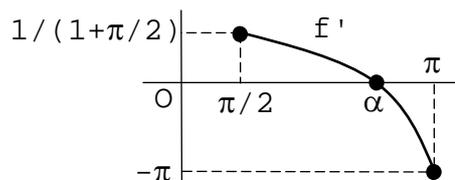
1ª) $f'(\pi/2) \cdot f'(\pi) < 0$:

- $f'(\pi/2) = 1/(1+\pi/2) > 0$.
- $f'(\pi) = -\pi/1 = -\pi < 0$.

2ª) f' es continua en $[\pi/2,\pi]$:

- $[\pi/2,\pi] \stackrel{2}{\subset} \text{Dom}(f') = \text{Dom}(f)$:
- Si $a \in [\pi/2,\pi]$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen } x + x \cdot \cos x}{1 + x \cdot \text{sen } x} = \frac{\text{sen } a + a \cdot \cos a}{1 + a \cdot \text{sen } a} = f'(a)$$



3º) Ahora bien, como f es continua en α , por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α , entonces, por el **criterio de la variación del signo de la primera derivada**, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

* * *

NOTA:

$$\begin{aligned} \text{Si } \pi/2 \leq x \leq \pi &\Rightarrow \text{sen } x \geq 0 \stackrel{3}{\Rightarrow} x \cdot \text{sen } x \geq 0 \stackrel{4}{\Rightarrow} 1 + x \cdot \text{sen } x \geq 1 \Rightarrow 1 + x \cdot \text{sen } x > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f \text{ y } f' \text{ est\u00e1n definidas en } [\pi/2,\pi] \end{aligned}$$

¹ Los dominios de f y f' no son f\u00e1ciles de calcular. Aunque, evidentemente, coinciden, pues en ambos casos se requiere que $1+x\cdot\text{sen } x$ sea positivo.

² La demostraci\u00f3n de esta inclusi\u00f3n est\u00e1 en la nota al final del problema.

³ Ya que x es positivo.

⁴ Sumamos 1 a los dos miembros de la desigualdad.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA D1.

Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}$ se anula en algún punto del intervalo $(0,\pi/2)$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (2 PUNTOS)

Primero derivamos la función f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)\right]' = \\ &= \frac{1}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)' = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (3^{\operatorname{sen}x})' = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 3^{\operatorname{sen}x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x = \frac{\pi \cdot \ln 3 \cdot \cos x \cdot 3^{\operatorname{sen}x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}{8\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen}x}\right)}} \end{aligned}$$

A continuación se puede seguir uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones del **teorema de Rolle**, existe α en $(0,\pi/2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

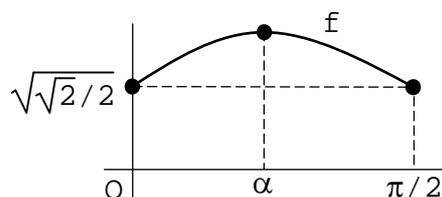
En efecto:

1a) $f(0)=f(\pi/2)$:

- $f(0)=\sqrt{\operatorname{sen}(\pi/4)}=\sqrt{\sqrt{2}/2}$
- $f(\pi/2)=\sqrt{\operatorname{sen}(3\pi/4)}=\sqrt{\sqrt{2}/2}$

2a) f es continua en $[0,\pi/2]$ por ser derivable¹ en \mathbb{R} .

3a) f es derivable en $(0,\pi/2)$ por serlo en \mathbb{R} .



¹ Ver la nota al final del problema.

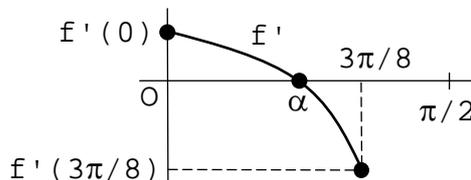
SEGUNDO MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones del **teorema de Bolzano**, existe α en $(0, 3\pi/8)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1a) $f'(0) \cdot f'(3\pi/8) < 0$, ya que el signo de f' sólo depende del producto $\cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)$, pues todos los demás factores son positivos:

- $\text{Signo}(f'(0)) = + \cdot + = +$
- $f'(\pi/2) = 0$
- $\text{Signo}(f'(3\pi/8)) = + \cdot - = -$



2a) f' es continua en $[0, 3\pi/8]$:

- $[0, 3\pi/8] \subset \text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) \stackrel{1}{=} \mathbb{R}$
- Si $a \in [0, 3\pi/8]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\pi \cdot \ln 3 \cdot \cos x \cdot 3^{\sin x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)}{8 \cdot \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)}} = \\ &= \frac{\pi \cdot \ln 3 \cdot \cos a \cdot 3^{\sin a} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin a}\right)}{8 \cdot \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin a}\right)}} = f'(a) \end{aligned}$$

NOTA:

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 &\stackrel{2}{\Rightarrow} 3^{-1} \leq 3^{\sin x} \leq 3^1 \stackrel{3}{\Rightarrow} \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{el radicando es positivo} \Rightarrow \text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

¹ La demostración de esta igualdad está en la nota al final del problema.

² La función exponencial $f(x)=3^x$ es creciente.

³ Multiplicamos por $\pi/4$.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA D2.

Sabemos que las funciones $f(x)=\pi x-x^2$ y $g(x)=\text{sen } x$ se cortan sólo en dos puntos. Encuentra esos dos puntos y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. (3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\pi x-x^2 \\ y=\text{sen } x \end{cases} \Rightarrow \pi x-x^2=\text{sen } x \stackrel{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=\pi \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 0 y π qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	Y_1	Y_2
$\pi/2$	$\pi^2/2-\pi^2/4=\pi^2/4 \approx 2,5$	1

3º) Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi (\pi x - x^2 - \text{sen } x) \cdot dx = \left(\pi \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cos x \right) \Big|_0^\pi = \\ &= \left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} + \cos \pi \right) - (0 - 0 + \cos 0) = \frac{\pi^3}{6} - 2 = \frac{\pi^3 - 12}{6} \end{aligned}$$

¹ Esta ecuación se resuelve a ojo.