JUNIO DE 2007. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x- \qquad\qquad az=-1 \\ x+(a+3)y+(4-a)z=0 \\ x+(a+3)y+(a^2+2)z=a+2 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & a+3 & 4 & 1 \\ 0 & a+3 & a^2+a+2 & a+3 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & -1 \\ 0 & a+3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a+2 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+3=0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow a=1,\ a=-2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-3, el sistema es incompatible[4]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

2º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2z=-1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=1-4\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

4º) Si $a\neq-3$, $a\neq-2$ y $a\neq1$, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x-az=-1 \\ (a+3)y+4z=1 \\ (a-1)(a+2)z=a+2 \end{array}\right\} \overset{5}{\Rightarrow} z=\frac{a+2}{(a-1)(a+2)}=\frac{1}{a-1} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+3)y=1-4z=1-\frac{4}{a-1}=\frac{a-1-4}{a-1}=\frac{a-5}{a-1} \Rightarrow \boxed{y=\frac{a-5}{a^2+2a-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-1+az=-1+\frac{a}{a-1}=\frac{-a+1+a}{a-1}=\frac{1}{a-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a-1}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

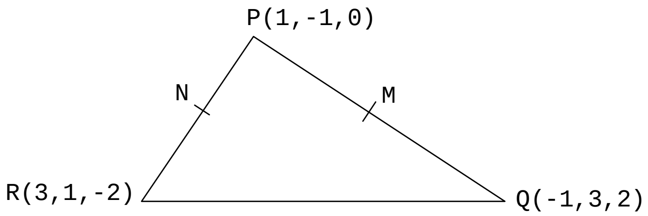
4 Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.

5 Como ya se han estudiado los casos en los que se anulan los coeficientes de las incógnitas que vamos a despejar ahora, podemos hacer esto tranquilamente.

JUNIO DE 2007. PROBLEMA A2.

Halla la ecuación continua de la recta formada por todos los puntos que equidistan de P(1,-1,0), Q(-1,3,2) y R(3,1,-2). (2 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:



Si X(x,y,z) es uno de esos puntos, d(X,P)=d(X,Q)=d(X,R). Por tanto:

$$\begin{cases} d(X,P)=d(X,Q) \\ d(X,P)=d(X,R) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2} \\ \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x+1+2y+1=2x+1-6y+9-4z+4 \\ -2x+1+2y+1=-6x+9-2y+1+4z+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-8y-4z+12=0 \\ 4x+4y-4z-12=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y-z=-3 \\ x+y-z=3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2y-z=-3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$$

SEGUNDO MÉTODO:

Los puntos que equidistan de P y Q son los puntos del plano *mediador* del segmento PQ. Como el punto medio de ese segmento es M(0,1,1) y $[\overrightarrow{PQ}]=(-2,4,2)=-2(1,-2,-1)$, dicho plano tiene por ecuación:

$$x-2y-z+D=0 \Rightarrow -2-1+D=0 \Rightarrow D=3 \Rightarrow x-2y-z+3=0$$

Los puntos que equidistan de P y R son los puntos del plano *mediador* del segmento PR. Como su punto medio es N(2,0,-1) y el vector $[\overrightarrow{PR}]=(2,2,-2)=2(1,1,-1)$, dicho plano tiene por ecuación:

$$x+y-z+D=0 \Rightarrow 2+1+D=0 \Rightarrow D=-3 \Rightarrow x+y-z-3=0$$

Por tanto, la recta buscada es la intersección de ambos planos[3]:

$$\begin{cases} x-2y-z=-3 \\ x+y-z=3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2y-z=-3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$$

---

1 2ªf-1ªf.
2 2ªf·1/3.
3 Aunque aparentemente este método es distinto del anterior, en realidad coinciden.

JUNIO DE 2007. PROBLEMA B1.

Calcula el valor de t para que el determinante de la matriz A valga 0:

$$\begin{pmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ t-1 & t & 2 \\ t-1 & t & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ t-1 & t & 2 \\ t-1 & t & t+1 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & 2 \\ 0 & t-1 & t+1 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \overset{3}{=} (t-1)^3$$

Resolvemos la ecuación:

$$(t-1)^3=0 \Rightarrow t-1=0 \Rightarrow t=1$$

[1] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
[2] 3ªf-2ªf.
[3] El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

JUNIO DE 2007. PROBLEMA B2.

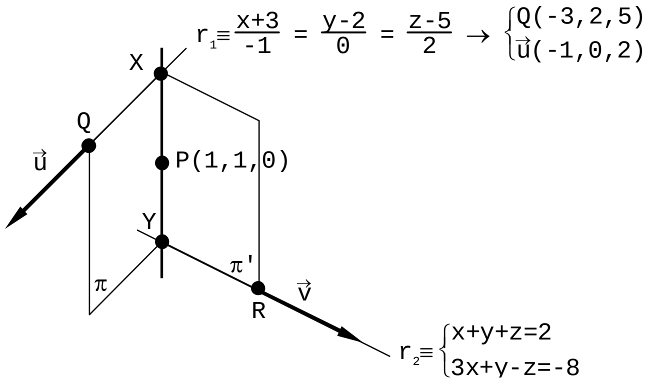
Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(1,1,0) y corta a las rectas:

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{2} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 3x+y-z+8=0 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:

La recta XY es la intersección[1] de los planos π y π':



Como $P \notin r_1$, ya que no satisface su ecuación, P y r_1 determinan un plano: el plano π. Como $[\overrightarrow{PQ}]=(-4,1,5)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1)-3(y-1)-z=0 \Rightarrow 2x+3y+z-5=0$$

Como $P \notin r_2$, ya que no satisface sus ecuaciones, P y r_2 determinan un plano: el plano π'. Ahora bien, todos los planos que contienen a la recta r_2, y π' es uno de ellos, tienen por ecuación[2]:

$$\pi' \equiv \alpha(x+y+z-2)+\beta(3x+y-z+8)=0$$

Y como el punto P está en el plano π', satisface su ecuación:

$$12\beta=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \pi \equiv \alpha(x+y+z-2)=0 \Rightarrow \pi' \equiv x+y+z-2=0$$

Por tanto, las ecuaciones generales de la recta XY son:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XY \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

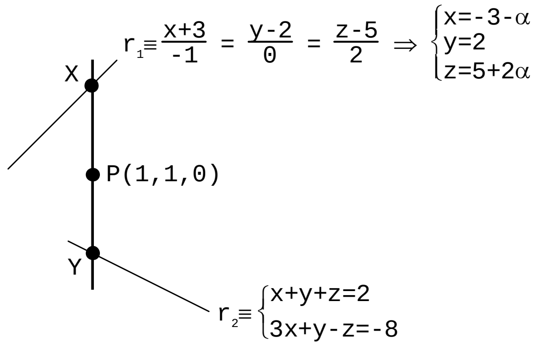
---

[1] Un problema de esta naturaleza no siempre tiene solución. La desventaja de este primer método es que se obtiene solución incluso cuando no la hay. Pero como en Selectividad es improbable que pongan un problema sin solución, puede utilizarse tranquilamente. También se puede resolver el problema calculando la ecuación del plano π y hallando su intersección con la recta r_2. Conocido Y, la recta PY queda determinada.

[2] Otra forma de obtener el plano π' es encontrando primero las ecuaciones paramétricas de la recta r_2, con lo que tendríamos un punto y un vector direccional de dicha recta. Con esos datos y el punto P se calcularía la ecuación de π'.

[3] 2ªf-2·1ªf.

SEGUNDO MÉTODO:



Calculamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r_2:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+y-z=-8 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -8 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -14 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ y+2z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+\beta \\ y=7-2\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

Por estar el punto X en la recta r_1: $X(-3-\alpha,2,5+2\alpha)$.

Por estar el punto Y en r_2: $Y(-5+\beta,7-2\beta,\beta)$.

Como los vectores $[\overrightarrow{PX}]=(-4-\alpha,1,5+2\alpha)$ y $[\overrightarrow{PY}]=(-6+\beta,6-2\beta,\beta)$ son colineales,[3] sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{-4-\alpha}{-6+\beta}=\frac{1}{6-2\beta}=\frac{5+2\alpha}{\beta} \Rightarrow \begin{cases} -24+8\beta-6\alpha+2\alpha\beta=-6+\beta \\ \beta=30+12\alpha-10\beta-4\alpha\beta \\ -4\beta-\alpha\beta=-30-12\alpha+5\beta+2\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha\beta-6\alpha+7\beta=18 \\ 4\alpha\beta-12\alpha+11\beta=30 \\ 3\alpha\beta-12\alpha+9\beta=30 \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha\beta-6\alpha+7\beta=18 \\ -3\beta=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha-6\alpha+14=18 \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha=4 \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Estos valores satisfacen la tercera ecuación: $-12+24+18=30$. Lo que significa que el problema tiene solución.

Como $[\overrightarrow{PY}]$ es vector direccional de la recta buscada:

$$\beta=2 \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(-4,2,2) \Rightarrow XY \equiv \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$

---

1 2ªf-3·1ªf.
2 2ªf·(-1/2).
3 Linealmente dependientes.
4 Resuelvo el sistema formado por las dos primeras ecuaciones. Para ello, resto a la segunda dos veces la primera.

Junio de 2007. Problema C1.

Halla la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6}$$

(2 Puntos)

Como se trata de una integral racional (cociente de polinomios), calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=2 \Rightarrow 1=5\cdot A \Rightarrow A=1/5 \\ \text{Si } x=-3 \Rightarrow 1=-5\cdot B \Rightarrow B=-1/5 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int\frac{dx}{x^2+x-6}=\int\frac{1/5}{x-2}\cdot dx-\int\frac{1/5}{x+3}\cdot dx=\frac{1}{5}\cdot\int\frac{1}{x-2}\cdot dx-\frac{1}{5}\cdot\int\frac{1}{x+3}\cdot dx\overset{1}{=}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\ln|x-2|-\frac{1}{5}\cdot\ln|x+3|+C$$

Comprobación[2]:

$$\left(\frac{1}{5}\cdot\ln|x-2|-\frac{1}{5}\cdot\ln|x+3|\right)'=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}=$$

$$=\frac{x+3-x+2}{5(x-2)(x+3)}=\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x^2+x-6}$$

[1] Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.
[2] Si no resulta muy difícil el cálculo de las derivadas, es conveniente hacer la comprobación para cerciorarnos de que la integral está bien calculada.

JUNIO DE 2007. PROBLEMA C2.

Dada la función $f(x)=x\cdot sen(\frac{\pi}{4}\cdot x)$, demuestra que existe $\alpha\in(0,4)$ tal que $f(\alpha)=f(\alpha+1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices (Ayuda: usa una nueva función g construida adecuadamente a partir de f.) (3 Puntos)

Se considera la función[1]:

$$g(x)=f(x)-f(x+1)=x\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)-(x+1)\cdot sen\left[\frac{\pi}{4}\cdot(x+1)\right]$$

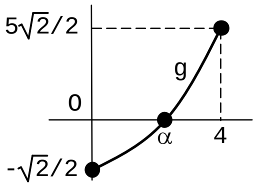
Como esta función satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(0,4)$ tal que $g(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f(\alpha)-f(\alpha+1)=0 \Rightarrow f(\alpha)=f(\alpha+1)$$

En efecto:

1ª) $g(0)\cdot g(4)<0$:

- $g(0)=0\cdot sen\,0-1\cdot sen\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$
- $g(4)=4\cdot sen\,\pi-5\cdot sen\frac{5\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>0$



2ª) g es continua en $[0,4]$:

- $[0,4]\subset Dom(g)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[0,4]$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left\{x\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)-(x+1)\cdot sen\left[\frac{\pi}{4}\cdot(x+1)\right]\right\}=$$

$$=a\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot a\right)-(a+1)\cdot sen\left[\frac{\pi}{4}\cdot(a+1)\right]=g(a)$$

[1] Si hay que probar que existe α tal que $f(\alpha)=f(\alpha+1)$, es decir, tal que $f(\alpha)-f(\alpha+1)=0$, hay que considerar una función que se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f(x)-f(x+1)$.

JUNIO DE 2007. PROBLEMA D1.

Demuestra que la función $f(x)=(1-x^2)\cdot \text{sen}x$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,\pi/2)$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (2 Puntos)

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

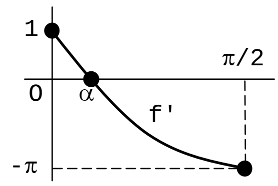
$$f'(x)=-2x\cdot \text{sen}\,x+(1-x^2)\cdot \cos x$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(0,\pi/2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(0)\cdot f'(\pi/2)<0$:

- $f'(0)=0\cdot \text{sen}\,0+1\cdot \cos 0=1>0$.
- $f'(\frac{\pi}{2})=-\pi\cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}+(1-\frac{\pi^2}{4})\cdot \cos\frac{\pi}{2}=-\pi<0$.



2ª) f' es continua en $[0,\pi/2]$:

- $[0,\pi/2]\subset \text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[0,\pi/2]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}[-2x\cdot \text{sen}\,x+(1-x^2)\cdot \cos x]=-2a\cdot \text{sen}\,a+(1-a^2)\cdot \cos a=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la primera derivada, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

JUNIO DE 2007. PROBLEMA D2.

Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=2x$ y $g(x)=6+3x-x^2$. (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=6+3x-x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x=6+3x-x^2 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -2 y 3 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
0	0	6

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-2}^{3}(6+3x-x^2-2x)\cdot dx=\int_{-2}^{3}(-x^2+x+6)\cdot dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right)_{-2}^{3}=$$

$$=\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)=\frac{27}{2}+\frac{22}{3}=\frac{125}{6}$$