Índice: Comparación de infinitésimos. La recta tangente. Existencia de la recta tangente. Significado geométrico del cociente incremental. Las tangentes laterales. Problemas.

1.- Comparación de infinitésimos

Las funciones $f(x)=x$, $g(x)=3x$ y $h(x)=x^2$, por ejemplo, son infinitésimos en $x=0$. Cuando x tiende a cero, ¿cuál de ellas tiende más rápidamente a cero? La tabla siguiente nos lo muestra:

x	f(x)	g(x)	h(x)
1/10	1/10	3/10	1/100
1/100	1/100	3/100	1/10000
1/1000	1/1000	3/1000	1/1000000
…	…	…	…
↓	↓	↓	↓
0	0	0	0

Evidentemente, h(x) tiende a cero mucho más rápidamente que las otras dos; mientras que éstas, f(x) y g(x), lo hacen, por así decir, a la par.

La forma más sencilla de comparar dos infinitésimos consiste en calcular el límite de su cociente.[1] Observa que h/f es un infinitésimo en x=0, f/h es un infinito[2] y f/g no es ni una cosa ni otra.

* * *

Más precisamente, si f y g son dos infinitésimos[3] en x_0:

a) *f es de orden superior a g* si f/g es un infinitésimo en x_0.

b) *f es de orden inferior a g* si f/g es un infinito[4] en x_0.

c) *f y g son del mismo orden* si el límite de su cociente es un número real distinto de cero.

d) *f y g no son comparables* si el límite de su cociente no existe.[5]

Así, $h(x)=x^2$ es un infinitésimo en x=0 de orden superior a f(x)=x; mientras que f(x)=x y g(x)=3x son infinitésimos del mismo orden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{x^2}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right|=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0}3=3$$

---

[1] Si este límite no tiene sentido plantearlo, tampoco lo tiene la correspondiente comparación de infinitésimos. En lo que sigue no va a presentarse este caso.

[2] Recuerda la definición de infinito vista en la lección L-9.

[3] Averiguar si una función es o no un infinitésimo (o un infinito) requiere el cálculo de un límite. Por tanto, cuando este límite no tenga sentido plantearlo, tampoco tendrá sentido plantearse la cuestión de si dicha función es o no un infinitésimo.

[4] O, lo que es lo mismo, g/f es un infinitésimo en x_0.

[5] Salvo que se trate de un infinito. Observa que el límite en 0 de x/x^2 no existe, pero, al tratarse de un infinito, x y x^2 sí son comparables.

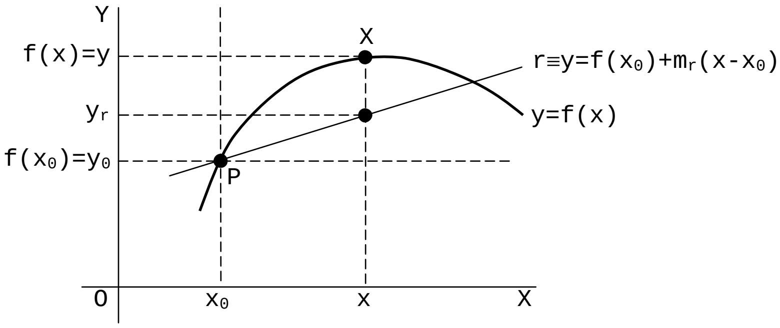
2.- La recta tangente

Consideremos una función $y=f(x)$ y un punto $P(x_0,y_0)$ de su gráfica.

Nos proponemos la siguiente cuestión: ¿cuál de las rectas que pasa por P se encuentra más próxima a la gráfica de f en las proximidades de dicho punto?[1]

Para responderla, necesitamos "medir" esa proximidad de alguna manera. Veamos cómo.

Supongamos que $X(x,y)$ sea un punto que se mueve libremente sobre la gráfica de la función.



Observa lo siguiente:[2]

- $\Delta x=x-x_0$ es la distancia[3] entre el punto X y la recta vertical que pasa por P.
- $\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)$ es la distancia[3] entre el punto X y la recta horizontal que pasa por P.
- Si r es una recta inclinada ($m_r\neq 0$) que pasa por P, su ecuación punto-pendiente es $y-f(x_0)=m_r(x-x_0)$.

Por tanto,[4] $y-y_r=f(x)-f(x_0)-m_r(x-x_0)=\Delta y-m_r\cdot\Delta x$ nos da una medida[3] de la proximidad entre el punto X y la recta r.

* * *

Si Δx e Δy son infinitésimos comparables en x_0,[5] entonces sólo se pueden dar tres casos:

1º) Que Δy sea de orden superior a Δx:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y-m_r\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-m_r\right)=0-m_r=-m_r\neq 0$$

En este caso, todos los infinitésimos $(\Delta y-m_r\cdot\Delta x)$ son del mismo orden que Δx, excepto Δy, el que mide la proximidad de X a la recta horizontal que pasa por P, que es de orden superior.

[1] Basta recordar la idea intuitiva que tenemos de recta tangente para darse cuenta de que vamos en su busca.
[2] Δx e Δy se leen *incremento de x* e *incremento de y*, respectivamente.
[3] Salvo el signo, ya que esta diferencia puede ser también negativa (o nula).
[4] y_r es la ordenada del punto de la recta r que tiene la misma abscisa que el punto X.
[5] En el próximo apartado veremos las posibles situaciones que se pueden presentar.

2º) Que Δy sea de orden inferior a Δx:

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y-m_r\cdot\Delta x}{\Delta y}=\lim_{x\to x_0}\left(1-m_r\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\overset{1}{=}1-m_r\cdot 0=1$$

En este caso, todos los infinitésimos son del mismo orden[2] que Δy, excepto Δx, el que mide la proximidad de X a la recta vertical que pasa por P, que es de orden superior.

3º) Que Δx e Δy sean del mismo orden:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=L\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y-m_r\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-m_r\right)=L-m_r$$

En este caso, todos los infinitésimos son del mismo orden que Δx, excepto el que mide la proximidad de X a la recta inclinada que pasa por P que tiene por pendiente $m_r=L$, que es de orden superior.

* * *

Pues bien, la recta asociada al infinitésimo de orden superior es, por definición, *la recta tangente* a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x_0: la recta horizontal que pasa por P (si se da el primer caso), la recta vertical (si se da el segundo) o la recta inclinada de pendiente $m_r=L$ (si se da el tercero).

3.- Existencia de la recta tangente

En el apartado anterior hemos supuesto que Δx e Δy eran infinitésimos en x_0 (y además comparables). Ahora bien, para que Δx e Δy sean infinitésimos en x_0 es necesario que f sea continua en x_0 y que tenga sentido plantear el límite de f en dicho punto.[3]

En efecto, Δx e Δy (y, por tanto, $\Delta y-m_r\cdot\Delta x$) son funciones que tienen el mismo dominio que f, ya que x es la abscisa de un punto de la gráfica de esta última función. Por tanto, Δx es un infinitésimo en x_0 solamente si tiene sentido plantear[4] el límite de f en x_0. Para que también Δy sea un infinitésimo en x_0 (y, por tanto, también lo sean las diferencias $\Delta y-m_r\cdot\Delta x$) es necesario además que f sea continua en x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=f(x_0)-f(x_0)=0$$

[1] Como $\Delta y/\Delta x$ es un infinito en x_0, $\Delta x/\Delta y$ es un infinitésimo en x_0.
[2] Concretamente, infinitésimos equivalentes.
[3] Recuerda que una función también es continua en los puntos de su dominio en los que no tiene sentido plantear el límite.
[4] Si no tiene sentido plantear el límite de f en x_0, entonces tampoco tiene sentido plantear si Δx es o no un infinitésimo en x_0. Recuerda lo dicho en la nota 2 de la primera página.

* * *

Teniendo esto presente, se pueden presentar las tres situaciones siguientes:

1ª) *No tiene sentido hablar de recta tangente* en aquellos puntos del dominio de f en los que Δx e Δy no sean ambos infinitésimos (o ni siquiera tenga sentido plantearse si lo son o no).[1]

Por ejemplo, es lo que sucede en el origen de coordenadas con la función *signo* (por no ser continua en dicho punto) o con la función $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ (por carecer de sentido su límite en ese punto).[2]

2ª) *No existe recta tangente* en aquellos puntos del dominio de f en los que los infinitésimos Δx e Δy no son comparables.

Por ejemplo, es lo que sucede en el origen de coordenadas con la función $f(x)=x\cdot\text{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$.

3ª) *Existe recta tangente* en aquellos puntos del dominio de f en los que los infinitésimos Δx e Δy son comparables:

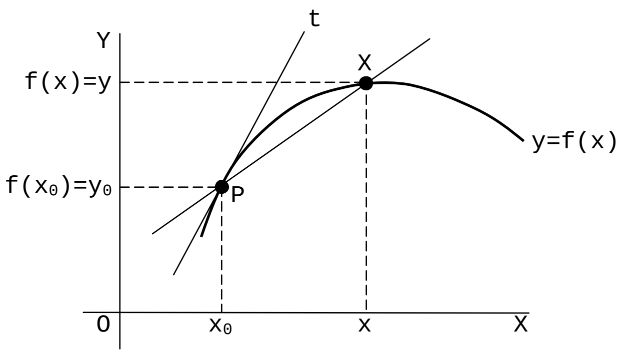
a) Si $\Delta y/\Delta x$ es un infinito en x_0, la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 es la recta vertical $x=x_0$.

b) Si el límite en x_0 de $\Delta y/\Delta x$ es un número real, la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 tiene por pendiente:

$$m_t \overset{3}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

4.- Significado geométrico del cociente incremental

El siguiente gráfico repite el anterior, pero se ha eliminado lo que ahora no interesa y se han añadido la recta PX y la tangente[4] en x_0:



[1] Esto es, en los puntos en los que la función no sea continua o, siendo continua, no tenga sentido plantear su límite.

[2] Ya que su dominio es $\{0\}\cup[1,+\infty)$.

[3] Hemos sustituido el *cociente incremental* $\Delta y/\Delta x$ por su valor.

[4] Suponemos, pues, que f cumple en x_0 las condiciones que se requieren para que dicha recta exista.

Como la distancia del punto X a la recta PX es cero, resulta que la recta PX es la más próxima a X de todas las que pasan por P. Por tanto, si le seguimos la pista a dicha recta conforme el punto X tiende al punto P, daremos con la recta tangente. Dicho de otro modo, la recta tangente en P es el límite de la recta PX cuando X tiende a P:

$$t = \lim_{X \to P} PX$$

Y si la tangente no es vertical y m_{PX} es la pendiente de la recta PX, tendremos:

$$m_t = \lim_{X \to P} m_{PX} \qquad (*)$$

Ahora bien, como $[\overrightarrow{PX}] = (x - x_0, y - y_0) = (x - x_0, f(x) - f(x_0)) = (\Delta x, \Delta y)$ es un vector direccional de la recta PX, su pendiente puede expresarse de las siguientes maneras:

$$m_{PX} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vemos, pues, que el cociente incremental es precisamente la pendiente de la recta PX.

Sustituyendo ahora cualquiera de los valores de m_{PX} en la fórmula (*), obtenemos el resultado que ya conocemos:

$$m_t \overset{1}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{2}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

5.- Las tangentes laterales

Si en los apartados anteriores sustituimos los límites que en ellos aparecen por los correspondientes límites laterales, se llega de igual modo al concepto de *tangentes laterales*. La relación entre éstas y la tangente queda resumida en el siguiente cuadro:[3]

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Recta tangente</th><th colspan="4">Tangente lateral derecha</th></tr>
<tr><th>NTS</th><th>V</th><th>NV m_d</th><th>NE</th></tr>
<tr><th rowspan="4">Tangente lateral izquierda</th><th>NTS</th><td>NTS</td><td>V</td><td>NV $m_t=m_d$</td><td>NE</td></tr>
<tr><th>V</th><td>V</td><td>V</td><td>NE</td><td>NE</td></tr>
<tr><th>NV m_i</th><td>NV $m_t=m_i$</td><td>NE</td><td>• Si $m_i=m_d$, NV $m_t=m_i=m_d$
• Si $m_i \neq m_d$, NE</td><td>NE</td></tr>
<tr><th>NE</th><td>NE</td><td>NE</td><td>NE</td><td>NE</td></tr>
</table>

[1] Cuando el punto X tiende al punto P, la abscisa de X tiende a la abscisa de P, x a x_0.
[2] En lugar de $x \to x_0$, en este caso es costumbre poner $\Delta x \to 0$.
[3] El significado de las siglas es el siguiente: NTS=No tiene sentido; NE=No existe; V=Vertical, NV=No vertical; m_t=pendiente de la tangente; m_i=pendiente de la tangente lateral izquierda; m_d=pendiente de la tangente lateral derecha.

* * *

Por ejemplo, calculemos las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$ en los puntos P(-1,0), O(0,0) y Q(3,6):

$$m_t=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x+1}\overset{1}{=}\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2}}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\sqrt{\frac{x^2}{x+1}}=\sqrt{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

Como el cociente incremental es un infinito,[2] la tangente (y la tangente lateral derecha)[3] en P es la recta vertical x=-1.

Estudiemos ahora el origen de coordenadas:

$$m_i=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x\cdot\sqrt{x+1}}{x}=-\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt{x+1}=-1$$

$$m_d=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\cdot\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x+1}=1$$

Esta función no tiene recta tangente en el origen de coordenadas, pero sí tangentes laterales: y=-x es la tangente lateral izquierda e y=x, la derecha.

Por último, veamos el punto Q:

$$m_t=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^3+x^2}-6}{x-3}\overset{4}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x^3+x^2-36}{(x-3)(\sqrt{x^3+x^2}+6)}\overset{5}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x+12}{\sqrt{x^3+x^2}+6}=\frac{11}{4}$$

La recta tangente en Q es:

$$y-6=(11/4)\cdot(x-3)\ \Rightarrow\ 4y-24=11x-33\ \Rightarrow\ 11x-4y-9=0$$

6.- Problemas

1) Calcula las tangentes a las siguientes funciones en el origen de coordenadas:

a) $y=\operatorname{sen} x$ **b)** $y=\operatorname{tg} x$ **c)** $y=\operatorname{arc\,sen} x$

d) $y=\operatorname{arc\,tg} x$ **e)** $y=\ln(1+x)$ **f)** $y=e^x-1$

g) $y=1-\cos x$ **h)** $y=(1+x)^n-1$ **i)** $y=\sqrt[n]{1+x}-1$

2) Halla las tangentes en P(0,0) y Q(-1,0) a la función:

$$y=\sqrt{x^2\cdot\frac{1+x}{1-x}}$$

---

[1] Ya que Dom(f)=[-1,+∞). Fíjate que, cuando x tiende a -1, sale la indeterminación 0/0; lo que nos está indicando que tanto Δy como Δx son infinitésimos en -1. El que sean o no comparables dependerá de que este límite (o el de su valor absoluto, si fuese necesario) exista o no.
[2] No es necesario en este caso calcular el límite del valor absoluto.
[3] Observa que no tiene sentido hablar de la tangente lateral izquierda.
[4] Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador.
[5] Descomponemos en factores el numerador y simplificamos.