

1) (1,4p) Define asíntota oblicua de una función f en $+\infty$. Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la función $y=\sqrt{x^2-2x}$ tiene en $+\infty$.

2) (1,2p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{\ln^2 x}$$

3) (1,2p) La función $y=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en $(1,1)$, que no es un extremo relativo. Halla razonadamente a , b y c .

4) (1,2p) Calcula:

$$\int \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} \cdot dx$$

5) (1,2p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ x+(t+1)y+z=0 \\ x+y=1 \end{array} \right\}$$

6) (1,4p) Define matriz inversible. Calcula los valores de x para los cuales la siguiente matriz no tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

7) (1,2p) Un cubo tiene un vértice en el punto $P(1,3,0)$ y una de sus caras está en el plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas r y s . Halla la ecuación de dicho plano y el área total del cubo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{0}$$

8) (1,2p) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,0)$ y es paralela a los planos $x-y+z=0$ e $y=0$.

Ejercicio 1: Define asíntota oblicua de una función f en $+\infty$. Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la función $y=\sqrt{x^2-2x}$ tiene en $+\infty$.

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

La recta $y=x-1$ es asíntota oblicua de f en $+\infty$:

$$\bullet k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right) = +\infty \cdot \sqrt{1-0} = +\infty$$

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = \sqrt{1-0} = 1$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-2x} - x) \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} \stackrel{2}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = \frac{-2}{\sqrt{1-0} + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \sqrt{x^2-2x} - (x-1) \stackrel{3}{=} \sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2-2x+1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el sustraendo es mayor que el minuendo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

¹ Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

² Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.

³ Ya que en $+\infty$, como $x-1 > 0$, $x-1 = |x-1| = \sqrt{(x-1)^2}$.

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{\ln^2 x}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Hacemos el cambio de variable $x-1=t$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{\ln^2 x} \stackrel{1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{[\ln(1+t)]^2} \stackrel{2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2/2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

¹ También puede hacerse por L'Hôpital, en cuyo caso, para obtener la indeterminación 0/0, aplicamos la regla del límite de la composición al numerador.

² Ya que, en $t=0$, $1 - \cos t \sim t^2/2$ y $\ln(1+t) \sim t$.

Ejercicio 3: La función $y=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en $(1,1)$, que no es un extremo relativo. Halla razonadamente a , b y c .

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Si $y''(1) \neq 0$, entonces, como $y'(1)=0$, por el criterio de la derivada segunda la función tendría un extremo en $x=1$. Pero no lo tiene. Por tanto, $y''(1)=0$. Podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y''
1	1	0	0

Como $y=x^3+ax^2+bx+c$, entonces $y'=3x^2+2ax+b$ e $y''=6x+2a$.

Como el punto $(1,0)$ pertenece a las gráficas de las funciones y'' e y' y el punto $(1,1)$ pertenece a la gráfica de la función y , tenemos lo siguiente:

$$y''(1)=0 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \stackrel{1}{\Rightarrow} 3-6+b=0 \Rightarrow b=3$$

$$y(1)=1 \Rightarrow 1+a+b+c=1 \stackrel{2}{\Rightarrow} -3+3+c=0 \Rightarrow c=0$$

¹ Ya que $a=-3$.

² Ya que $a=-3$ y $b=3$.

Ejercicio 4: Calcula:

$$\int \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} \cdot dx$$

* * *

(1,2 PUNTOS)

Solución:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} \cdot dx &\stackrel{1}{=} \int (\arcsen x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \stackrel{2}{=} \\ &= \frac{(\arcsen x)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{2}{3} \cdot (\arcsen x)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\left(\frac{2}{3} \cdot (\arcsen x)^{3/2} \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (\arcsen x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{\arcsen x}}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{1}{=} \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}}$$

¹ Este paso es correcto, ya que el dominio de la función integrando es [0,1).

² Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $\arcsen x = t^2$, $(1/\sqrt{1-x^2}) \cdot dx = 2t \cdot dt$. O $\arcsen x = t$, $(1/\sqrt{1-x^2}) \cdot dx = dt$. O incluso por partes.

Ejercicio 5: Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ x+(t+1)y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases} \quad (1,2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & t+1 & t & | & t+1 \\ 1 & t+1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \stackrel{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & t+1 & t & | & t+1 \\ 0 & 0 & 1-t & | & -t-1 \\ 0 & -t & -t & | & -t \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & t+1 & t & | & t+1 \\ 0 & -t & -t & | & -t \\ 0 & 0 & 1-t & | & -t-1 \end{pmatrix} \stackrel{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -t=0 \\ 1-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $t=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \stackrel{4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

2º) Si $t=1$, el sistema es incompatible:⁵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ -ty-tz=-t \\ (1-t)z=-t-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=\frac{t+1}{t-1}} \Rightarrow ty=t-tz \stackrel{6}{\Rightarrow} y=1-\frac{t+1}{t-1}=\frac{t-1-t-1}{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{-2}{t-1}} \Rightarrow x=t+1-(t+1)y-tz=t+1-(t+1)\cdot\frac{-2}{t-1}-t\cdot\frac{t+1}{t-1}=\frac{t^2-1+2t+2-t^2-t}{t-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{t+1}{t-1}}$$

¹ $2^{\text{af}}-1^{\text{af}}$; $3^{\text{af}}-1^{\text{af}}$.

² $2^{\text{af}}\leftrightarrow 3^{\text{af}}$.

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

⁴ Suprimimos la segunda ecuación por trivial.

⁵ Ya que la tercera ecuación es incompatible.

⁶ Dividimos por t y sustituimos z por su valor.

Ejercicio 6: Define matriz inversible. Calcula los valores de x para los cuales la siguiente matriz no tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Una matriz no tiene inversa si su determinante es cero. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 \cdot |x| - |x-2| = 0 \Rightarrow 2 \cdot |x| = |x-2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2x| = |x-2| \Rightarrow \begin{cases} 2x = x-2 \\ 2x = -x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 3x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2/3 \end{cases}$$

Ejercicio 7: Un cubo tiene un vértice en el punto $P(1,3,0)$ y una de sus caras está en el plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas r y s . Halla la ecuación de dicho plano y el área total del cubo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{0} \qquad (1,2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a) Evidentemente, las rectas no son paralelas:

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0}$$

Por tanto, el plano π que andamos buscando queda determinado por el punto $O(0,0,0)$, ya que pasa por el origen de coordenadas, y los vectores $\vec{u}=(2,1,1)$ y $\vec{v}=(-1,2,0)$, ya que es paralelo a las rectas r y s :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - y + 5z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - 5z = 0$$

b) Como el punto $P(1,3,0)$ no pertenece al plano π , pues no satisface su ecuación, la longitud del lado del cubo es precisamente la distancia de P a π . Por tanto:

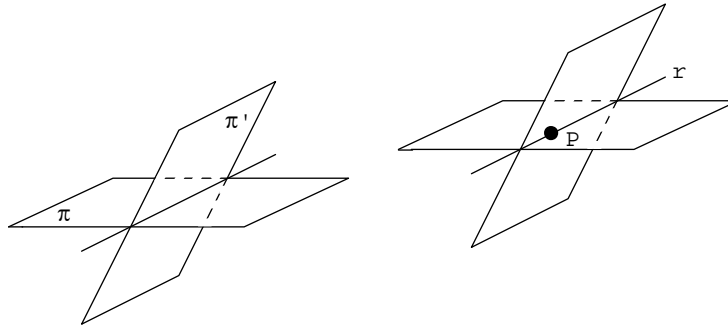
$$d(P, \pi) = \frac{|2+3-0|}{\sqrt{4+1+25}} = \frac{5}{\sqrt{30}} \Rightarrow A = 6 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{30} = 5$$

Ejercicio 8: Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,0)$ y es paralela a los planos $x-y+z=0$ e $y=0$. (1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la recta r que andamos buscando pasa por el punto $P(2,-1,0)$ y es paralela a los planos $\pi \equiv x-y+z=0$ y $\pi' \equiv y=0$, se encontrará situada en los planos paralelos a ellos que pasan por P :



Por tanto:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x-y+z+D=0 \\ y+D'=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2+1+0+D=0 \\ -1+D'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-3 \\ D'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z-3=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=3+y-z \\ y=-1 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=-1 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1} \end{aligned}$$

* * *

También puede obtenerse la recta calculando directamente un vector direccional. Éste se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores característicos de los planos dados, ya que ambos vectores son perpendiculares a la recta buscada. O calculando la intersección de dichos planos, con lo que se obtiene una recta paralela a r y, por tanto, un vector direccional de ésta.