1) (1,5p) Calcula:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$$

2) (1p) Averigua el valor del parámetro k para que la función sea continua en todo su dominio:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{sen}(2x)}{\ln(1+x)} & \text{si } -1<x\neq 0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$$

3) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}$$

4) (1,5p) Halla la simétrica de la recta $r\equiv x=y=z$ respecto del plano $\pi\equiv x-2y+z-6=0$.

5) (1,5p) Calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π:

$$r\equiv\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=2-3\lambda\\ z=5+\lambda\end{cases}\qquad\qquad \pi\equiv 3x-2y+z-5=0$$

6) (1p) Calcula:

$$\int_2^4 \ln x\cdot dx$$

7) (1p) Determina el punto de la recta $x+2y+5=0$ cuya distancia al punto $P(3,1)$ es mínima.

8) (1p) Discute el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x-3z=-3\\ 2x+ky-3z=-2\\ x+kz=1\end{array}\right\}$$

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2} \overset{1}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(x-1-1)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt{x-1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{2+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

[1] Multiplicamos numerador y denominador por las expresiones conjugadas de numerador y denominador.

Ejercicio 2: *Averigua el valor del parámetro k para que la función sea continua en todo su dominio:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(2x)}{ln(1+x)} & si\ -1<x\neq 0 \\ k & si\ x=0 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Para que la función sea continua en su dominio, debe serlo en x=0:

- $f(0)=k$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(2x)}{ln(1+x)} \overset{1}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2=2$

Por tanto, k=2.

[1] Ya que $sen f \sim f$ y $ln(1+f) \sim f$ si f es un infinitésimo. También puede hacerse por L'Hôpital, en cuyo caso, para obtener la indeterminación 0/0, tenemos que aplicar la regla del límite de la composición.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica la función:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} \overset{1}{=} \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \overset{2}{=} \frac{1}{2}\cdot[\ln(1+\operatorname{sen} x)-\ln(1-\operatorname{sen} x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} - \frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x)+\cos x\cdot(1+\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)\cdot(1-\operatorname{sen} x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x\cdot(1-\operatorname{sen} x+1+\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

[1] Por las propiedades de los logaritmos. También puede calcularse la derivada directamente.
[2] Por las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 4: *Halla la simétrica de la recta $r\equiv x=y=z$ respecto del plano $\pi\equiv x-2y+z-6=0$.* *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r:

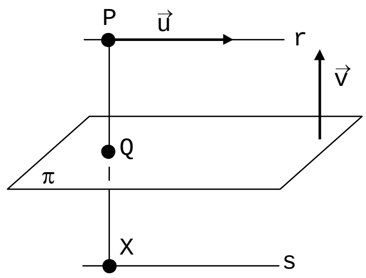
$$x=y=z \Rightarrow \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,1,1) \end{cases}$$

Calculamos las ecuaciones paramétricas del plano π:

$$x-2y+z-6=0 \Rightarrow x=6+2y-z \Rightarrow \begin{cases} x=6+2\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

La recta y el plano son paralelos, ya que el producto escalar del vector direccional de la recta y el vector característico del plano, $\vec{v}(1,-2,1)$, es cero: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,1,1)\cdot(1,-2,1)=1-2+1=0$.

Sea Q la proyección de P sobre el plano π, X su simétrico y s la recta simétrica de r respecto de π:



Como $Q\in\pi$, $Q(6+2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$. Ahora bien, como los vectores $\vec{v}(1,-2,1)$ y $[\overrightarrow{PQ}]=(6+2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$ son colineales:[1]

$$\frac{6+2\alpha-\beta}{1}=\frac{\alpha}{-2}=\frac{\beta}{1} \Rightarrow \begin{cases} 6+2\alpha-\beta=\beta \\ \alpha=-2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-2\beta=-6 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow} \begin{cases} 3\alpha=-6 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+2\beta=0 \Rightarrow 2\beta=2 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow Q(1,-2,1) \overset{3}{\Rightarrow} X(2,-4,2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta simétrica es:

$$s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{1}$$

[1] El punto Q puede calcularse también como la intersección del plano π y la recta PQ (que pasa por P y tiene por vector direccional el vector característico del plano). O también teniendo en cuenta que el vector $[\overrightarrow{PQ}]$ es la proyección de $[\overrightarrow{PR}]$ sobre $\vec{v}$, donde R es un punto cualquiera del plano π, por ejemplo R(6,0,0).

[2] A la primera ecuación le sumamos la segunda.

[3] Ya que Q es el punto medio del segmento PX.

Ejercicio 5: Calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π:

$$r\equiv\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=2-3\lambda\\ z=5+\lambda\end{cases}\qquad \pi\equiv 3x-2y+z-5=0$$

(1,5 PUNTOS)

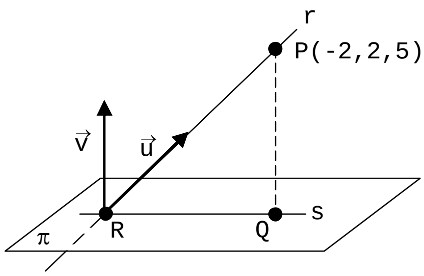
* * *

Solución:

La recta r pasa por el punto P(-2,2,5) y tiene a $\vec{u}(1,-3,1)$ como vector direccional.

Sea R el punto de corte de la recta r y el plano π.[1] Sean Q y s, respectivamente, las proyecciones de P y r sobre dicho plano.

Calculamos primero el punto R:[2]



$$3(-2+\lambda)-2(2-3\lambda)+5+\lambda-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6+3\lambda-4+6\lambda+5+\lambda-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\lambda=10 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow R(-1,-1,6)$$

El vector característico del plano π es perpendicular a la recta s. También lo es el producto vectorial $\vec{u}\wedge\vec{v}$:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k}$$

Por tanto, un vector direccional de la recta s es:[3]

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 2 & 7\end{vmatrix}=-16\vec{i}-22\vec{j}+4\vec{k}=-2(8\vec{i}+11\vec{j}-2\vec{k})$$

Como la recta s pasa por el punto R(-1,-1,6), su ecuación continua es la siguiente:

$$\frac{x+1}{8}=\frac{y+1}{11}=\frac{z-6}{-2}$$

* * *

También puede calcularse la recta s como intersección del plano π y el perpendicular a él que contiene la recta r. Éste queda determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}(1,-3,1)$ y $\vec{v}(3,-2,1)$.

---

[1] El producto escalar del vector direccional de la recta y el vector característico del plano, $\vec{v}(3,-2,1)$, es distinto de cero. Por tanto, son secantes.

[2] Como $R\in r$, $R(-2+\lambda,2-3\lambda,5+\lambda)$; y como pertenece también al plano π, satisface su ecuación.

[3] Este vector también puede calcularse hallando el punto Q como intersección del plano π con la recta PQ (determinada por el punto P y el vector característico de dicho plano). O teniendo en cuenta que el $[\vec{PQ}]$ es colineal con $\vec{v}$ o que $[\vec{PQ}]$ es la proyección de $[\vec{PR}]$ sobre $\vec{v}$.

Ejercicio 6: Calcula:

$$\int_2^4 \ln x \cdot dx$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\int_2^4 \ln x \cdot dx \overset{1}{=} [x \cdot \ln x - x]_2^4 = (4 \cdot \ln 4 - 4) - (2 \cdot \ln 2 - 2) \overset{2}{=}$$

$$= 8 \cdot \ln 2 - 4 - 2 \cdot \ln 2 + 2 = 6 \cdot \ln 2 - 2$$

* * *

$$\int \ln x \cdot dx \overset{3}{=} x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx \overset{4}{=} x \cdot \ln x - x + C$$

S	D	I
+	$\ln x$	1
-	$1/x$	x

Comprobación:

$$[x \cdot \ln x - x]' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

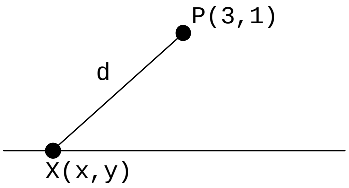
[1] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
[2] Por las propiedades de los logaritmos.
[3] Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.
[4] Esta integral es inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 7: *Determina el punto de la recta $x+2y+5=0$ cuya distancia al punto $P(3,1)$ es mínima.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Sea X un punto cualquiera de la recta dada:



La distancia del punto P al punto X tiene que ser mínima:

$$d=d(P,X)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

Tenemos que expresar la distancia en función de una sola variable. Ahora bien, como X pertenece a la recta dada, satisface su ecuación. Por tanto:

$$x+2y+5=0 \Rightarrow x=-5-2y \Rightarrow d=\sqrt{(-5-2y-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(-8-2y)^2+(y-1)^2}$$

Como $d>0$, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=(-8-2y)^2+(y-1)^2=64+32y+4y^2+y^2-2y+1=5y^2+30y+65$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=10y+30=0 \Rightarrow 10y=-30 \Rightarrow y=-3$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $y=-3$:

$$C''=10 \Rightarrow C''(-3)=10>0 \Rightarrow d \text{ es mínima en } y=-3$$

Por último:

$$y=-3 \Rightarrow x=-5+6=1 \Rightarrow X(1,-3)$$

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 8: Discute el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x-3z&=-3\\ 2x+ky-3z&=-2\\ x+kz&=1\end{aligned}\right\}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3\\ 2 & k & -3 & -2\\ 1 & 0 & k & 1\end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & -3\\ 0 & \mathbf{k} & 3 & 4\\ 0 & 0 & \mathbf{k+3} & 4\end{array}\right) \overset{2}{\to} \begin{cases} k=0\\ k+3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0\\ k=-3\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=-3, el sistema es incompatible:[3]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3\\ 0 & -3 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)$$

2º) Si k=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 4\end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to \begin{cases} x-3z=-3\\ 3z=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1\\ z=4/3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1\\ y=\alpha\\ z=4/3\end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{aligned} x-3z&=-3\\ ky+3z&=4\\ (k+3)z&=4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{4}{k+3}} \Rightarrow ky=4-3z=4-\frac{12}{k+3}=\frac{4k-12-12}{k+3}= \Rightarrow \boxed{y=\frac{4}{k+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-3+3z=-3+\frac{12}{k+3}=\frac{-3k-9+12}{k+3}=\frac{-3k+3}{k+3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3(1-k)}{k+3}}$$

[1] 2ªf-2·1ªf; 3ªf-1ªf.
[2] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
[3] Ya que la última ecuación es incompatible.
[4] Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.
[5] 3ªf-2ªf.