Índice: Derivada de la función inversa. Consecuencias. Derivada de la función potencial de exponente entero. Problemas.

1.- Derivada de la función inversa

Si f es derivable en x_0 y $f(x_0)\neq 0$, entonces 1/f también es derivable en x_0, y su derivada en dicho punto es $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=\frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x-x_0}\overset{1}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{-1}{f(x)\cdot f(x_0)}\right)\overset{2}{=}f'(x_0)\cdot\frac{-1}{f^2(x_0)}=\frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

* * *

Por tanto:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función f(x)=1/x:

$$f'(x)=\frac{-x'}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

2.- Consecuencias

1ª) La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, dividido todo ello por el denominador al cuadrado:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'=f'\cdot\frac{1}{g}+f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{f'}{g}+f\cdot\frac{-g'}{g^2}=\frac{f'}{g}+\frac{-f\cdot g'}{g^2}=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

Evidentemente, f/g es derivable allí donde lo sean f y g, siempre que g no se anule.

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$:

---

[1] Como f es derivable en x_0, es continua en dicho punto. Y como $f(x_0)\neq 0$, no es difícil *ver* que f(x) no se anula en un entorno de x_0. Por tanto, 1/f(x) tiene sentido en dicho entorno.

[2] El límite del primer factor es, evidentemente, $f'(x_0)$. El límite del segundo, $-1/f^2(x_0)$, ya que, como f es continua en x_0, el límite de f(x) en x_0 es $f(x_0)$.

$$f'(x)=\frac{(x+1)'\cdot(x-2)-(x+1)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{1\cdot(x-2)-(x+1)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

2ª) La derivada del cociente de una función entre un número es igual al cociente de la derivada de la función entre el número:

$$\left(\frac{f}{k}\right)'\overset{1}{=}\frac{f'\cdot k-f\cdot k'}{k^2}=\frac{f'\cdot k}{k^2}=\frac{f'}{k}$$

Evidentemente, el dominio de derivabilidad de f/k es el mismo que el de f.

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $f(x)=\frac{2x^2-x+8}{3}$:

$$f'(x)=\frac{(2x^2-x+8)'}{3}=\frac{4x-1}{3}$$

3.- Derivada de la función potencial de exponente entero

1º) La función[2] f^n es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f sea derivable, y su derivada es $(f^n)'=n\cdot f^{n-1}\cdot f'$:

$$(f^n)'=(f\cdot f\cdot\ldots\cdot f)'\overset{3}{=}f'\cdot f\cdot\ldots\cdot f+f\cdot f'\cdot\ldots\cdot f+\ldots+f\cdot f\cdot\ldots\cdot f'\overset{4}{=}n\cdot f^{n-1}\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $f(x)=(x^2-1)^9$:

$$f'(x)=9\cdot(x^2-1)^8\cdot(x^2-1)'=9\cdot(x^2-1)^8\cdot 2x=18x\cdot(x^2-1)^8$$

2º) La función[2] f^{-n} es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f sea derivable, y su derivada es $(f^{-n})'=-n\cdot f^{-n-1}\cdot f'$:

$$(f^{-n})'=\left(\frac{1}{f^n}\right)'\overset{5}{=}\frac{-(f^n)'}{(f^n)^2}=\frac{-n\cdot f^{n-1}\cdot f'}{f^{2n}}=-n\cdot f^{-n-1}\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$:

$$f'(x)=[(x-2)^{-2}]'=-2\cdot(x-2)^{-3}\cdot(x-2)'=-2\cdot(x-2)^{-3}\cdot 1=\frac{-2}{(x-2)^3}$$

[1] Por la derivada del cociente de dos funciones. También puede aplicarse la derivada del producto de un número por una función: f/k=(1/k)·f.
[2] n es un número natural distinto de cero.
[3] Por la derivada del producto de n funciones.
[4] Ya que se trata de la suma de n sumandos iguales.
[5] Por la derivada de la función inversa. También puede aplicarse la derivada del cociente de dos funciones. El numerador sería entonces la función constante 1.

4.- Problemas

1) Deriva las siguientes funciones:

a) $y=(3x^3+4x)^6$ **b)** $y=(6x^5+4x^2-1)^5$ **c)** $y=\dfrac{1}{x^2-1}$

d) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+4}$ **e)** $y=\dfrac{x+3}{x^2}$ **f)** $y=\dfrac{1}{(3x^3+8x)^4}$

g) $y=(2x+8)^{-7}$ **h)** $y=\dfrac{1}{(x^3+2x)^2+1}$ **i)** $y=\dfrac{1}{(2x^3+2)^3}$

2) Encuentra la tangente y la normal a las siguientes funciones en el punto de abscisa 0:

a) $y=(x^2+1)^6+(x^2-1)^{-6}+(x+1)^{-5}$ **b)** $y=(3x^2-1)^9\cdot(x^2+1)^4+x^2-1$

3) Calcula el ángulo que forman las curvas $y^2=4x$ y $2x^2=12-5y$ en sus puntos de contacto.

4) Halla los puntos de la gráfica de la función $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ en los que la tangente forma un ángulo de 45º con el eje OX.

5) Deriva las siguientes funciones e indica en qué puntos de su dominio no son derivables:

a) $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ **b)** $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ **c)** $y=(\sqrt[3]{x}+8)^2$

6) Halla las ecuaciones de la tangente y de la normal a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $y=\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{(1+2x^2)^3}$ en $x=1$ **b)** $y=1/(x^2-2)^3$ en $x=1$

7) Calcula la derivada enésima de la función $y=1/(x+1)$.

8) Halla el orden de contacto de la función $y=x^3$ y su tangente en los siguientes puntos:

a) $x=0$ **b)** $x=2$

9) Encuentra la parábola $y=ax^2+bx+c$ que tiene en el punto P(1,1) un contacto de orden 2 con $y=1/x$.

10) De todas las rectas que pasan por P(1,0), halla la que tiene en dicho punto un contacto de orden mayor con la curva $y=x^3-3x^2+2x$. ¿Qué recta es ésa? ¿Cuál es el orden de contacto? ¿Y el de las demás rectas que pasan por P?