1) (1p) Demuestra la siguiente propiedad de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \lambda\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) (1p) Define sistema de Cramer.

3) (1p) Demuestra la siguiente fórmula: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

4) (1,7p) Sin desarrollar el determinante y justificando cada paso, demuestra la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & b+a \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$$

5) (1,8p) Halla la inversa de la siguiente matriz utilizando determinantes y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6) (1,8p) Dados los vectores $\vec{a}=(-1,-7,3)$ y $\vec{b}=(2,1,-1)$:

a) Halla la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

b) Calcula el simétrico de $\vec{a}$ respecto de $\vec{b}$.

7) (1,7p) Si $\vec{a}=(3,0,-1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$ y $\vec{c}=(1,-1,0)$, comprueba la siguiente identidad:

$$[(\vec{a}\wedge\vec{b}),(\vec{b}\wedge\vec{c}),(\vec{c}\wedge\vec{a})]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$$

Ejercicio 4: *Sin desarrollar el determinante y justificando cada paso, demuestra la siguiente identidad:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & b+a \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & b+a \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} \underset{=}{1} \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = 0$$

Si a+b+c+d=0, el determinante vale cero por tener una columna nula; si a+b+c+d≠0, el determinante vale cero por tener dos columnas proporcionales (1ª y 4ª).

[1] 4ªc+2ªc+3ªc.

Ejercicio 5: *Halla la inversa de la siguiente matriz utilizando determinantes y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} -4+8-3=1$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=12;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-8$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=2;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-3;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{2}{\rightarrow} A^*=\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{3}{\rightarrow} (A^*)'=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7+0+8 & -1+0+1 & 2+0-2 \\ 0+24-24 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -28+12+16 & -4+2+2 & 8-3-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

1 Desarrollamos el determinante por la regla de Sarrus.
2 Escribimos la adjunta de A.
3 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

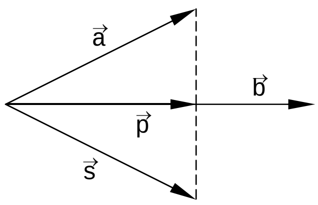
Ejercicio 6: *Dados los vectores $\vec{a}=(-1,-7,3)$ y $\vec{b}=(2,1,-1)$:* ***a)*** *halla la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$;* ***b)*** *calcula el simétrico de $\vec{a}$ respecto de $\vec{b}$.*

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sean $\vec{p}$ y $\vec{s}$, respectivamente, la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y el simétrico de $\vec{a}$ respecto de $\vec{b}$:



Entonces:

- $\vec{p}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\cdot\vec{b}=\frac{(-1,-7,3)\cdot(2,1,-1)}{(2,1,-1)\cdot(2,1,-1)}\cdot\vec{b}=\frac{-2-7-3}{4+1+1}\cdot\vec{b}=\frac{-12}{6}\cdot\vec{b}=$

$$=-2\cdot\vec{b}=-2\cdot(2,1,-1)=(-4,-2,2)$$

- $\vec{a}+\vec{s}=2\vec{p}\Rightarrow\vec{s}=2\vec{p}-\vec{a}=2(-4,-2,2)-(-1,-7,3)=(-8,-4,4)-(-1,-7,3)=$

$$=(-7,3,1)$$

Ejercicio 7: *Si $\vec{a}=(3,0,-1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$ y $\vec{c}=(1,-1,0)$, comprueba la siguiente identidad:*

$$[(\vec{a}\wedge\vec{b}),(\vec{b}\wedge\vec{c}),(\vec{c}\wedge\vec{a})]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$$ *(1,7 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Calculamos el primer miembro de la identidad:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\vec{j};\quad \vec{b}\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k};\quad \vec{c}\wedge\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

Por tanto:

$$[(\vec{a}\wedge\vec{b}),(\vec{b}\wedge\vec{c}),(\vec{c}\wedge\vec{a})]=\begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-2+6=4$$

2º) Calculamos el segundo miembro de la identidad:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=1-3=-2$$

Por tanto:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2=4$$