

27 de abril de 2008.

1) (2p) Demuestra:

a)

$$\begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

b) $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen}(\vec{a}, \vec{b})$, si $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$.

2) (1p) Define:

a) Sistemas de Cramer.

b) Base.

3) (1,7p) Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$$

4) (1,8p) Halla la inversa de la matriz A mediante determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5) (1,7p) Si $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ y $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$, halla $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.6) (1,8p) Si $\vec{a}(4, -2, -4)$ y $\vec{b}(6, -3, 2)$, calcula:a) Todos los vectores perpendiculares a \vec{a} .b) Todos los vectores perpendiculares a \vec{a} y \vec{b} .c) El volumen del tetraedro que determinan los vectores \vec{a} , \vec{b} e \vec{i} .

Ejercicio 3: Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases} \quad (1,7 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{30-75+16}{-30+1} = \frac{-29}{-29} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-32-60+5}{-29} = \frac{-87}{-29} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{25-160-10}{-29} = \frac{-145}{-29} = 5$$

b) Comprobación:

$$\begin{cases} 2+3=5 \\ 1+15=16 \\ 15-5=10 \end{cases}$$

Ejercicio 4: Halla la inversa de la matriz A mediante determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como $|A| \neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 3 - 1 + 4 = 2$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} (A^*)' = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 3 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2+1/2+1 & 3+1-4 & -1/2-1/2+1 \\ -1/2+0+1/2 & 3+0-2 & -1/2+0+1/2 \\ -3/2-1/2+2 & 9-1-8 & -3/2+1/2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Escribimos la adjunta de A.

² Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

Ejercicio 5: Si $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$ y $(\vec{a},\vec{b})=\pi/6$, halla $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})$. (1,7 PUNTOS)
* * *

Solución:

Evidentemente:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos(\pi/6) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 = 3/2$$

$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 - 1 = 2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2 \cdot 3/2 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{3+3+1} = \sqrt{7}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2 \cdot 3/2 + |\vec{b}|^2} = \sqrt{3-3+1} = 1$$

Por tanto:

$$\cos(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = \frac{(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}| \cdot |\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = 40^\circ 53' 36''$$

Ejercicio 6: Si $\vec{a}(4, -2, -4)$ y $\vec{b}(6, -3, 2)$, calcula: **a)** todos los vectores perpendiculares a \vec{a} ; **b)** todos los vectores perpendiculares a \vec{a} y \vec{b} ; **c)** el volumen del tetraedro que determinan los vectores \vec{a} , \vec{b} e \vec{i} .

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Sea $\vec{x}(x, y, z)$ un vector perpendicular a \vec{a} . Entonces:¹

$$\vec{x} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot (4, -2, -4) = 0 \Rightarrow 4x - 2y - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y - 2z = 0 \Rightarrow y = 2x - 2z \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 2\beta \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\cong}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Si \vec{x} es un vector perpendicular a \vec{a} y \vec{b} , entonces es colineal con $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Por tanto:³

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \alpha \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \alpha \cdot (-16\vec{i} - 32\vec{j}) = \\ &= -16\alpha \cdot (\vec{i} + 2\vec{j}) = -16\alpha \cdot (1, 2, 0) \stackrel{\cong}{=} \beta(1, 2, 0) \end{aligned}$$

c)

$$v = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{i}]| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| \stackrel{5}{=} \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-4 - 12| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

¹ También puede hacerse de la siguiente manera. Dos vectores concretos perpendiculares al vector \vec{a} son, por ejemplo, $(0, 4, -2)$ y $(4, 0, 4)$. Pues bien, los vectores perpendiculares al vector \vec{a} son los vectores $\vec{x} = \alpha(0, 4, -2) + \beta(4, 0, 4)$, con α y β no simultáneamente nulos.

² Donde α y β no pueden ser simultáneamente nulos.

³ También puede hacerse como el apartado anterior, lo que conduce a un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

⁴ Donde $\beta \neq 0$.

⁵ Desarrollamos el determinante por los elementos de la última fila.