

4 de abril de 2003.

1) (2p) Demuestra (sin desarrollar el determinante) que, si a la tercera columna de una matriz cuadrada de orden tres se le suma la segunda columna multiplicada por un número  $k$ , el determinante de la matriz resultante coincide con el de la matriz de partida.

Enuncia las propiedades de los determinantes en las que te bases para esta demostración.

2) (2p) Define:

- a) Vectores colineales.
- b) Vectores coplanarios.
- c) Base.
- d) Coordenadas de un vector en una base.

3) (1,5p) Si  $|A|=-1$ , halla, utilizando las propiedades de los determinantes y sin desarrollarlo, el valor de  $|B|$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{pmatrix}$$

4) (1,5p) Comprueba que la siguiente matriz tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro  $a$ . Calcula su inversa por determinantes y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

5) (1,5p) Si  $|\vec{a}|=6$ ,  $|\vec{b}|=8$  y  $|\vec{a} \wedge \vec{b}|=24 \cdot \sqrt{3}$ , halla  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

6) (1,5p) Si  $\vec{a}(1,-1,3)$ ,  $\vec{b}(-2,2,1)$  y  $\vec{c}(3,-2,5)$ , calcula:

- a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$ .
- b)  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ .

**Ejercicio 3:** Si  $|A|=-1$ , halla, utilizando las propiedades de los determinantes y sin desarrollarlo, el valor de  $|B|$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{pmatrix} \quad (1,5 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \\ &= -3 \cdot \left( \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \right) \stackrel{3}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \stackrel{4}{=} \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot |A| = 3 \cdot (-1) = -3 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Extraemos fuera del determinante los factores 3 y -1 de las filas segunda y tercera, respectivamente.

<sup>2</sup> Por las propiedades de los determinantes.

<sup>3</sup> El segundo determinante vale cero, ya que tiene dos filas proporcionales.

<sup>4</sup>  $2^{ac} \leftrightarrow 3^{ac}$ .

**Ejercicio 4:** Comprueba que la siguiente matriz tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro  $a$ . Calcula su inversa por determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

Como  $|A| \neq 0$ , la matriz  $A$  es inversible:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - (a^2-2) = 2$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz  $A$ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |a| = a; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |1| = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |a^2-2| = 2-a^2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |a| = a$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1} A^* = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2-a^2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{2} (A^*)' = \begin{pmatrix} a & 2-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} a & 2-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 1 & a - \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} - a \\ \frac{a}{2} - \frac{a}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup> Escribimos la adjunta de  $A$ .

<sup>2</sup> Calculamos la traspuesta de la adjunta de  $A$ .

**Ejercicio 5:** Si  $|\vec{a}|=6$ ,  $|\vec{b}|=8$  y  $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=24\cdot\sqrt{3}$ , halla  $\vec{a}\cdot\vec{b}$ . (1,5 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen}(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow 24 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 8 \cdot \text{sen}(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \text{sen}(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3}/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2(\vec{a}, \vec{b}) = 3/4 \Rightarrow \text{cos}^2(\vec{a}, \vec{b}) = 1/4 \Rightarrow \text{cos}(\vec{a}, \vec{b}) = \pm 1/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{cos}(\vec{a}, \vec{b}) = 6 \cdot 8 \cdot (\pm 1/2) = \pm 24$$

**Ejercicio 6:** Si  $\vec{a}(1, -1, 3)$ ,  $\vec{b}(-2, 2, 1)$  y  $\vec{c}(3, -2, 5)$ , calcula: **a)**  $\vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$ ;  
**b)**  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ .

(1,5 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:****a)**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 3 - 18 + 2 - 10 = -7$$

**b)**

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \vec{a} \wedge (12\vec{i} + 13\vec{j} - 2\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 12 & 13 & -2 \end{vmatrix} = -37\vec{i} + 38\vec{j} + 25\vec{k}$$