*Índice: Sucesiones. El método de inducción completa. Posición relativa de un punto y una sucesión. Clasificación de sucesiones. Problemas.*

## 1.- Sucesiones

Las progresiones aritméticas y geométricas, vistas en cursos anteriores, son ejemplos de sucesiones. Fundamentalmente, una *sucesión* es una ordenación de objetos (números, funciones, fórmulas, etc.), llamados *términos* de la sucesión, que cumple dos condiciones: existe un primer término y cada término tiene siguiente.

Así, la ordenación de menor a mayor de los números enteros no es una sucesión, pues no cumple la primera condición:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La ordenación de menor a mayor de los números reales no negativos tampoco es una sucesión, ya que no cumple la segunda condición. El 0, que sería el primer término, no tiene siguiente. ¿Cuál sería?, ¿el 0,1?, ¿el 0,01?, ¿el 0,001?

Los números naturales ordenados de mayor a menor no cumple ninguna de las dos condiciones:

$$\ldots, 3, 2, 1, 0$$

Por último, es importante recordar que dos sucesiones son *iguales* si coinciden término a término, esto es, el primero con el primero, el segundo con el segundo, etc.

## 2.- El método de inducción completa

Sea $F_n$ el *término enésimo o general* de una sucesión de fórmulas:

$$F_1, F_2, F_3, \ldots$$

Para demostrarlas todas a la vez[1] se utiliza el *método de inducción completa*, que consta de dos pasos:

**1º)** Comprobar $F_1$ (esto es, ver que la primera fórmula es cierta o, si se prefiere, que la fórmula $F_n$ es verdad para n=1).

**2º)** Demostrar la *implicación* $F_n \Rightarrow F_{n+1}$ (esto es, probar que *si* la enésima fórmula *fuese* cierta, *entonces* la siguiente también).

Ahora bien, como en este segundo paso n es un número natural cual-

[1] Evidentemente, no es posible probarlas una por una.

quiera, esto significa que, una vez demostrado, son ciertas todas las implicaciones de la sucesión:

$$F_1 \Rightarrow F_2,\ F_2 \Rightarrow F_3,\ F_3 \Rightarrow F_4, \ldots$$

Y como en el primer paso hemos probado que $F_1$ es cierta, entonces también son ciertas $F_2$ y $F_3$ y $F_4$…, esto es, que $F_n$ es verdad[1] $\forall n \in N^*$.

Por ejemplo, demostremos por inducción completa la fórmula del término general de una progresión aritmética de diferencia d:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

1º) Comprobamos la primera fórmula, esto es, que la fórmula anterior es cierta para n=1:

$$a_1 = a_1 + (1-1)\cdot d \Leftrightarrow a_1 = a_1 + 0\cdot d \Leftrightarrow a_1 = a_1$$

2º) Demostramos que *si* la enésima fórmula *fuese* cierta, *entonces* la siguiente también:

$$a_{n+1} \overset{2}{=} a_n + d \overset{3}{=} a_1 + (n-1)\cdot d + d = a_1 + (n-1+1)\cdot d = a_1 + n\cdot d$$

## 3.- Posición relativa de un punto y una sucesión

Antes de empezar recordemos que los *entornos de centro* $x_0$ ($x_0$ es un número real) *y radio r* (r es un número real positivo) son los intervalos abiertos de la forma $(x_0-r, x_0+r)$; y que los intervalos del tipo $(a,+\infty)$ y $(-\infty,b)$, donde a y b son números reales, son los entornos de $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente.

Pues bien, los puntos de la *recta ampliada* (incluidos, por tanto, $+\infty$ y $-\infty$) pueden adoptar tres posiciones distintas respecto de una sucesión[4]. Para verlo, consideremos, por ejemplo, el origen de coordenadas y las cinco sucesiones siguientes:

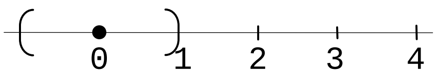
1, 2, 3, 4, 5, 6,…
0, 0, 0, 1, 2, 3,…
0, 1, 0, 2, 0, 3,…
1, 2, 0, 0, 0, 0,…
0, 0, 0, 0, 0, 0,…

**1ª)** Es evidente que, con el entorno de centro 0 y radio 1 (o me-

---

[1] $\forall$ se lee "para todo"; $\in$ se lee "que pertenece a" o "que es elemento de"; $N^*=\{1,2,3,\ldots\}$.
[2] Ya que, en una progresión aritmética, cada término se obtiene del anterior sumándole la diferencia.
[3] Si la enésima fórmula fuese cierta, podríamos utilizarla y sustituir $a_n$ por su valor.
[4] Si no se dice lo contrario, en adelante se tratará de sucesiones numéricas.

nor), el origen de coordenadas puede separarse de todos los términos de la primera sucesión, y de todos los de la segunda menos de los tres primeros (de estos, con ningún entorno). En ambos casos, de todos menos de un número finito de términos (todos menos cero[1] y todos menos tres):




**2ª)** De la tercera sucesión, con el mismo entorno, puede separarse de todos los términos que ocupan una posición par (infinitos), pero no existe ningún entorno de 0 que lo pueda separar de todos los que ocupan una posición impar (infinitos).

**3ª)** De la cuarta, solo puede separarse de los dos primeros términos; y de la quinta, de ninguno. En ambas, solo de un número finito de términos (dos y cero).

Por tanto, dada una sucesión cualquiera, los puntos de la recta ampliada se clasifican en tres grupos según sea finito o infinito el número de términos de la sucesión de los que dichos puntos pueden o no pueden separarse mediante sus entornos:

| Grupos | NÚMERO de términos de los que el punto NO puede separarse | NÚMERO de términos de los que el punto SÍ puede separarse |
|---|---|---|
| 1º | FINITO | INFINITO |
| 2º | INFINITO | INFINITO |
| 3º | INFINITO | FINITO |

Por ejemplo, si consideramos la última de las sucesiones, todos los puntos de la recta ampliada (incluidos, pues, +∞ y -∞) pertenecen al primer grupo, excepto el 0 que pertenece al tercer grupo.

Los puntos más interesantes (por raros) son los pertenecientes a los dos últimos grupos. Un punto de estos tiene la propiedad de que no se puede separar de infinitos términos de la sucesión. Es como si estos infinitos términos se aglomeraran en las proximidades del punto. Por eso se les llama *puntos de aglomeración* de la sucesión. Así, el 0 es punto de aglomeración de las tres últimas sucesiones.

Ahora bien, esa aglomeración es, por así decir, abrumadora en los puntos del último grupo, pues esos puntos solo pueden separarse de un número finito de términos de la sucesión. Cuando ocurre esto estamos ante un *punto límite* (o *límite*, sin más). El 0 es punto límite de las dos últimas sucesiones.

[1] Cero es un número finito.

## 4.- Clasificación de sucesiones

Si repasas la tabla del apartado anterior, verás que un punto límite de una sucesión se caracteriza porque solo puede separarse de un número finito de términos de la sucesión.

Por tanto, es fácil ver que una sucesión no puede tener más de un punto límite[1]. Teniendo esto en cuenta, podemos clasificar las sucesiones así:

- *Convergentes:* las que tienen por límite un número real.
- *Divergentes:* las que tienen por límite $+\infty$ o $-\infty$.
- *Oscilantes:* las que no tienen límite.

Por ejemplo, la sucesión 1, 1/2, 1/3, 1/4,… es convergente y su límite es el número 0. En efecto, con el entorno de centro 0 y radio una décima, solo logramos separarlo de los diez primeros términos; si el radio es una centésima, de los cien primeros; si una milésima, de los mil primeros; etc. Siempre de un número finito de términos.

La sucesión 1, 2, 3, 4,… es divergente y su límite es $+\infty$. En efecto, con el entorno $(10,+\infty)$, solo logramos separarlo de los diez primeros términos; con el entorno $(100,+\infty)$, de los cien primeros; con $(1000,+\infty)$, de los mil primeros; etc. Siempre de un número finito de términos.

La sucesión 0, 1, 0, 2, 0, 3,… es oscilante y tiene dos puntos de aglomeración: 0 y $+\infty$.

* * *

Si L (que puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$) es el límite de la sucesión $(x_n)$, esto lo indicamos así: $\lim x_n = L$.

* * *

Como se ve en los ejemplos anteriores, la idea intuitiva de límite como *tendencia*[2], manejada en cursos anteriores y que seguiremos utilizando aquí, se ajusta a lo dicho en el apartado anterior.

## 5.- Problemas

**1)** Demuestra por inducción completa la fórmula del término general de las progresiones geométricas. Haz lo mismo con la fórmula de la suma de los n primeros términos.

**2)** Demuestra por inducción completa las siguientes fórmulas:

**a)** $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n^3/3+n^2/2+n/6$ **b)** $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=n^2(n+1)^2/4$

[1] Aunque sí más de un punto de aglomeración.

[2] La palabra *tendencia* suele emplearse como sinónimo de límite. Así, se dice que tal sucesión *tiende* a L en lugar de decir que L es su límite.

**3)** Pon un ejemplo de sucesión que tenga tres puntos de aglomeración sin que se repita ningún término.

**4)** Pon un ejemplo de sucesión que no tenga ningún término repetido y cuyo límite sea:

**a)** $+\infty$ **b)** $-\infty$ **c)** 0 **d)** 2

**5)** Escribe el término general de una sucesión que no tenga ningún término repetido y cuyo límite sea:

**a)** $+\infty$ **b)** $-\infty$ **c)** 0 **d)** 2

**6)** Clasifica las siguientes sucesiones. Indica los puntos de aglomeración de cada una de ellas y, en su caso, el límite:

**a)** 7, 7, 7,…
**b)** 1/3, 1/9, 1/27,…
**c)** 1, -1, 2, -2, 3, -3,…
**d)** 1,6; 1,66; 1,666;…
**e)** -2, -4, -6, -8,…
**f)** 7, -1, 7, -2, 7, -3,…
**g)** 3; 3,1; 3; 3,01; 3; 3,001;…
**h)** -1, 2, -1, 3, -1, 4,…
**i)** 1, 10, 2, 100, 3, 1000,…
**j)** 0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5,…

**7)** Indica los puntos de aglomeración de las siguientes sucesiones. ¿Tienen límite?

**a)** $a_n=1+(-1)^n$ **b)** $b_n=[2^n+(-2)^n]/2^n$

**8)** Encuentra dos sucesiones que no tengan límite, pero que su suma sí lo tenga.

**9)** Sea $(x_n)$ una sucesión convergente a L:

**a)** Si tachamos un número finito de términos, ¿la sucesión resultante tiene límite? ¿Qué límite?

**b)** Si tachamos un número infinito de términos de modo que siga quedando una sucesión, ¿esta tiene límite? ¿Qué límite?

**10)** Prueba que la sucesión -3, 3, -3, 3,… no tiene límite.

**11)** Demuestra que 0,4 no es el límite de la sucesión 0,3; 0,33; 0,333;…

**12)** Demuestra que $\lim k=k$.

**13)** Si el límite de una sucesión es un número positivo, prueba que todos los términos de la sucesión excepto un número finito son positivos.

**14)** Si todos los términos de una sucesión convergente son negativos, prueba que el límite no puede ser un número positivo. ¿Puede ser cero?

**15)** Prueba que el límite de una sucesión convergente es único.