21 de febrero de 2003.

1) (1p) Define rango de una matriz.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

3) (1p) Demuestra que $[\alpha\cdot A]'=\alpha\cdot A'$.

4) (1p) Demuestra que si A y B son inversibles, A·B también lo es y que $(A\cdot B)^{-1}= B^{-1}\cdot A^{-1}$.

5) (2p) Discute y resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a^2 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=1 \end{array}\right\}$$

6) (2p) Elimina los parámetros:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1-a+3b \\ y=2a+b \\ z=3-b \\ t=1-a+b \end{array}\right.$$

7) (2p) Dadas las matrices A y B, calcula $(A\cdot B)^{-1}$ y $(A\cdot B)^n$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5: Discute y resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z=a^2\\ x+ay+z=a\\ x+y+az=1 \end{aligned}\right\}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2\\ 1 & a & 1 & a\\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & a\\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 1-a & a-1\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 1-a & a-1\\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & a^2-1 \end{array}\right) \overset{4}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-1=0\\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\\ a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2\\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es incompatible:[5]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

2º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta\\ y=\alpha\\ z=\beta \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & -(a-1) & a-1\\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a-1)(a+1) \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -(a+2) & (a+1) \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+az=1\\ y-z=1\\ -(a+2)z=a+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{a+1}{a+2}} \Rightarrow y=1+z=1-\frac{a+1}{a+2}=\frac{a+2-a-1}{a+2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-y-az=1-\frac{1}{a+2}+\frac{a^2+a}{a+2}=\frac{a+2-1+a^2+a}{a+2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{(a+1)^2}{a+2}}$$

---

[1] 1ªf↔3ªf.
[2] 2ªf-1ªf; 3ªf-a·1ªf.
[3] 3ªf+2ªf.
[4] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
[5] Ya que la última ecuación es incompatible.
[6] Como a≠1, podemos dividir las dos últimas filas por a-1.

Ejercicio 6: *Elimina los parámetros:*

$$\begin{cases} x=1-a+3b \\ y=2a+b \\ z=3-b \\ t=1-a+b \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} -a+3b=x-1 \\ 2a+b=y \\ -b=z-3 \\ -a+b=t-1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-3 \\ -1 & 1 & t-1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & x-1 \\ 0 & 7 & 2x+y-2 \\ 0 & -1 & z-3 \\ 0 & -2 & -x+t \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & x-1 \\ 0 & -1 & z-3 \\ 0 & 7 & 2x+y-2 \\ 0 & -2 & -x+t \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & x-1 \\ 0 & -1 & z-3 \\ 0 & 0 & 2x+y+7z-23 \\ 0 & 0 & -x-2z+t+6 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x+y+7z-23=0 \\ -x-2z+t+6=0 \end{cases}$$

1 2ªf+2·1ªf; 4ªf-1ªf.
2 2ªf↔3ªf.
3 3ªf+7·2ªf; 4ªf-2·2ªf.

Ejercicio 7: *Dadas las matrices A y B, calcula $(A\cdot B)^{-1}$ y $(A\cdot B)^n$:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos A·B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

2º) Hallamos la inversa de A·B por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{1}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow (A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 1-1 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

3º) Calculamos $(A\cdot B)^n$:

$$(A\cdot B)^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(A\cdot B)^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$$

[1] 2ªf-1ªf.