Índice: Matriz traspuesta. Propiedades de la trasposición. Resolución de la ecuación matricial X·A=C. Problemas. Anexo.

1.- Matriz traspuesta

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de orden $m\times n$, se llama *traspuesta* de A, y se escribe A' o $(a_{ij})'$, a la matriz de orden $n\times m$ que tiene por filas las correspondientes columnas de A.

Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Si la matriz es cuadrada, se conserva la diagonal principal y los demás elementos pasan a ocupar el lugar simétrico respecto de dicha diagonal:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

Si $A=(a_{ij})$, es fácil ver que $A'=(a_{ij})'=(a_{ji})$. Esto es, el elemento ij-ésimo de la matriz A' es el elemento ji-ésimo de la matriz A.

2.- Propiedades de la trasposición

1ª) Si A es una matriz cualquiera, $[A']'=A$.

En efecto, si $A=(a_{ij})$:

$$[A']'=[(a_{ij})']' \overset{1}{=} [(a_{ji})]' \overset{1}{=} (a_{ij})=A$$

2ª) Si A y B son dos matrices del mismo orden, $[A+B]'=A'+B'$.

En efecto, si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$:

$$[A+B]'=[(a_{ij})+(b_{ij})]' \overset{2}{=} (a_{ij}+b_{ij})' \overset{1}{=} (a_{ji}+b_{ji}) \overset{2}{=}$$
$$=(a_{ji})+(b_{ji}) \overset{1}{=} (a_{ij})'+(b_{ij})'= A'+B'$$

3ª) Si A es una matriz cualquiera, $[\alpha\cdot A]'=\alpha\cdot A'$.

En efecto, si $A=(a_{ij})$:

$$[\alpha\cdot A]'=[\alpha\cdot(a_{ij})]' \overset{3}{=} (\alpha\cdot a_{ij})' \overset{1}{=} (\alpha\cdot a_{ji}) \overset{3}{=}$$
$$=\alpha\cdot(a_{ji}) \overset{1}{=} \alpha\cdot(a_{ij})'=\alpha\cdot A'$$

[1] Por la definición de matriz traspuesta.
[2] Por la definición de suma de matrices.
[3] Por la definición de producto de una matriz por un número real.

4ª) Si A y B son dos matrices de órdenes $m\times n$ y $n\times p$, respectivamente, $[A\cdot B]'=B'\cdot A'$.

En efecto, si $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $A'=(c_{ij})$ y $B'=(d_{ij})$:

$$[A\cdot B]' \overset{1}{=} (a_{j1}\cdot b_{1i}+a_{j2}\cdot b_{2i}+\ldots+a_{jn}\cdot b_{ni}) \overset{2}{=} (c_{1j}\cdot d_{i1}+c_{2j}\cdot d_{i2}+\ldots+c_{nj}\cdot d_{in}) \overset{3}{=}$$
$$=(d_{i1}\cdot c_{1j}+d_{i2}\cdot c_{2j}+\ldots+d_{in}\cdot c_{nj}) \overset{4}{=} B'\cdot A'$$

3.- Resolución de la ecuación matricial X·A=C

Si hay que resolver una ecuación matricial del tipo $X\cdot A=C$, basta trasponer los dos miembros de la ecuación, $A'\cdot X'=C'$, y resolver ésta como se ha indicado en la lección anterior. La solución es $X=X''$.

Por ejemplo:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5&4\\1&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0\\-1&3\\2&3\end{pmatrix}\cdot X'=\begin{pmatrix}3&1\\-5&0\\4&3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&1\\-1&3&-5&0\\2&3&4&3\end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&1\\0&3&-2&1\\0&3&-2&1\end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&1\\0&3&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&1\\0&1&-2/3&1/3\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow X'=\begin{pmatrix}3&1\\-2/3&1/3\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}3&-2/3\\1&1/3\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}3&-2/3\\1&1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+0&-3-2&6-2\\1+0&-1+1&2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5&4\\1&0&3\end{pmatrix}$$

4.- Problemas

1) Si $A=\begin{pmatrix}-1&5&2\\4&1&8\\6&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&1&5\\4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&0&2\\-1&1&5\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&2&5\end{pmatrix}$, halla:

a) $A'+6B+3C'$ **b)** $(A-C)'+7B-6B'$ **c)** $(4A-6B-3C)'$
d) $A-A'-3(B+C')$ **e)** $7A-2C+3(6A'-2B)$ **f)** $7C-6(B-3C)$
g) $D\cdot B\cdot C$ **h)** $D\cdot(B+C)$ **i)** $D\cdot(B+C')$

---

[1] El elemento ij-ésimo de la matriz $[A\cdot B]'$, que es el elemento ji-ésimo de la matriz $A\cdot B$, se obtiene, por tanto, multiplicando la j-ésima fila de A por la i-ésima columna de B, ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m\times n$ y B una matriz de orden $n\times p$.
[2] Como A' y B' son las traspuestas de A y B, respectivamente, $a_{j1}=c_{1j}$, $b_{1i}=d_{i1}$, etc.
[3] Por la propiedad conmutativa del producto de números reales.
[4] El producto de la i-ésima fila de B' por la j-ésima columna de A', ambas de n elementos al ser B' una matriz de orden $p\times n$ y A' una matriz de orden $n\times m$, es el elemento ij-ésimo de la matriz $B'\cdot A'$.
[5] 2ªf+1ªf; 3ªf-2·1ªf.
[6] 3ªf-2ªf.
[7] 2ªf·1/3; eliminamos la última fila.

j) $B\cdot C\cdot D'$ **k)** $(B-C)\cdot D'$ **l)** $(7B-6C)'\cdot D$

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}4^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4^p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula:

a) A^2+B^2 **b)** A^3+B^3 **c)** $A\cdot B$ **d)** $(A\cdot B)^2$

e) $(A')^2+(B')^2$ **f)** $A'\cdot B'$ **g)** $(A'\cdot B')^2$ **h)** $A'\cdot B$

3) Prueba que la siguiente matriz es normal:[1]

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

4) Si A es una matriz de orden n, prueba que $A\cdot A'$ es simétrica.[2]

5) Escribe un ejemplo de matriz simétrica.

6) Si A y B son matrices simétricas, prueba que $(A\cdot B)'=B\cdot A$.

7) Si A es antisimétrica,[3] demuestra que A^2 es simétrica y que A^3 es antisimétrica.

8) Escribe un ejemplo de matriz antisimétrica.

9) Demuestra que todos los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son 0.

10) Si A y B son antisimétricas, demuestra que $(A\cdot B)'=A\cdot B$.

11) Si A es antisimétrica y ortogonal,[4] demuestra que $A^3+A^2+A+I=0$.

12) Si A es simétrica y ortogonal:

a) calcula k para que $2A^3+A^2+kA-I=0$.

b) calcula p y q para que $A^3+pA^2+qA=I$ $(A\neq kI)$.

13) De qué tipo son las potencias de una matriz antisimétrica.

14) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ **b)** $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}=X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ **d)** $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 5 & 2 & 17\end{pmatrix}$

15) Calcula la matriz X si se sabe que verifica

$$X\cdot\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \qquad X\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} \qquad X\cdot\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -4\end{pmatrix}$$

[1] La matriz cuadrada A es *normal* si $A\cdot A'=A'\cdot A$.
[2] La matriz cuadrada A es *simétrica* si $A'=A$, esto es, si $a_{ij}=a_{ji}$.
[3] La matriz cuadrada A es *antisimétrica* si $A'=-A$, esto es, si $a_{ij}=-a_{ji}$.
[4] La matriz cuadrada A es *ortogonal* si $A\cdot A'=A'\cdot A=I$.

5.- Anexo

Para ver más claramente las demostraciones de las propiedades de la trasposición de matrices, las repetimos aquí para el caso en el que las matrices A y B son de orden 2×3 (y 3×2, respectivamente, para la última propiedad).

1ª) $[A']'=A$.

$$[A']'=\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}'\right]' \overset{1}{=} \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}\right]' \overset{1}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=A$$

2ª) $[A+B]'=A'+B'$.

$$[A+B]'=\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\right]' \overset{2}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}' \overset{1}{=}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} \overset{2}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix} \overset{1}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}'+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}' = A'+B'$$

3ª) $[\alpha\cdot A]'=\alpha\cdot A'$.

$$\left[\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right]' \overset{3}{=} \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \alpha\cdot a_{13} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \alpha\cdot a_{23} \end{pmatrix}' \overset{1}{=} \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{21} \\ \alpha\cdot a_{12} & \alpha\cdot a_{22} \\ \alpha\cdot a_{13} & \alpha\cdot a_{23} \end{pmatrix} \overset{3}{=}$$

$$=\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \overset{1}{=} \alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}'=\alpha\cdot A'$$

4ª) $[A\cdot B]'=B'\cdot A'$.

$$[A\cdot B]'=\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\right]' \overset{4}{=}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix}' \overset{1}{=}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} \\ a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32} \end{pmatrix} \overset{5}{=}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}\cdot a_{11}+b_{21}\cdot a_{12}+b_{31}\cdot a_{13} & b_{11}\cdot a_{21}+b_{21}\cdot a_{22}+b_{31}\cdot a_{23} \\ b_{12}\cdot a_{11}+b_{22}\cdot a_{12}+b_{32}\cdot a_{13} & b_{12}\cdot a_{21}+b_{22}\cdot a_{22}+b_{32}\cdot a_{23} \end{pmatrix} \overset{4}{=}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \overset{1}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}'\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}'=B'\cdot A'$$

---

[1] Por la definición de matriz traspuesta.
[2] Por la definición de suma de matrices.
[3] Por la definición de producto de una matriz por un número real.
[4] Por la definición de producto de matrices.
[5] Por la propiedad conmutativa del producto de números reales.