Índice: Sistemas equivalentes. Problemas.

1.- Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones lineales del mismo número de incógnitas, T_1 y T_2, son *equivalentes*, y se escribe $T_1 \sim T_2$, si tienen la misma solución general.

* * *

Las siguientes cuatro reglas, llamadas *transformaciones elementales*, permiten pasar de un sistema a otro equivalente.

1ª) Si se cambian entre sí dos ecuaciones de un sistema, se obtiene otro equivalente.

2ª) Si se multiplica una ecuación de un sistema por un número distinto de cero, se obtiene otro equivalente.

3ª) Si a una ecuación de un sistema se le suma otra multiplicada por un número, se obtiene otro equivalente.

4ª) Si en un sistema se elimina (o añade) una ecuación trivial, se obtiene otro equivalente.

Observa que estas transformaciones son reversibles:

- Si cambiamos entre sí de posición dos ecuaciones de un sistema, volviéndolas a cambiar regresamos al sistema de partida.
- Si multiplicamos una ecuación de un sistema por un número distinto de cero, bastará multiplicar la nueva ecuación por el inverso de dicho número para regresar al sistema de partida.
- Si, por ejemplo, a la 2ª ecuación de un sistema le sumamos 3 veces la 5ª ecuación, bastará restarle a la nueva ecuación 3 veces la 5ª para regresar al sistema de partida.
- Si eliminamos (o añadimos) una ecuación trivial de un sistema, bastará añadirla (o eliminarla) para regresar al de partida.

* * *

Las reglas 1ª) y 4ª) son evidentes. Las demostraciones de las otras dos son como sigue.

2ª) A la k-ésima ecuación del primer sistema la hemos multiplicado por λ ($\lambda \neq 0$) para obtener el segundo sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=c_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\cdot x_1+a_{k2}\cdot x_2+\ldots+a_{kn}\cdot x_n=c_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=c_m \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=c_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda\cdot a_{k1}\cdot x_1+\lambda\cdot a_{k2}\cdot x_2+\ldots+\lambda\cdot a_{kn}\cdot x_n=\lambda\cdot c_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=c_m \end{array}\right\}$$

- Si la n-tupla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ es solución particular del primer sis-

tema, entonces satisface todas las ecuaciones del segundo, salvo quizá la k-ésima. Pero como satisface la k-ésima del primero, se verifica:

$$a_{k1}\cdot\alpha_1+a_{k2}\cdot\alpha_2+\ldots+a_{kn}\cdot\alpha_n=c_k$$

Multiplicando ambos miembros de esta identidad por λ, queda:

$$\lambda\cdot a_{k1}\cdot\alpha_1+\lambda\cdot a_{k2}\cdot\alpha_2+\ldots+\lambda\cdot a_{kn}\cdot\alpha_n=\lambda\cdot c_k$$

Luego $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ satisface también la k-ésima ecuación del segundo sistema y, en consecuencia, es solución particular de éste.

• Si la n-tupla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ es solución particular del segundo sistema, entonces satisface todas las ecuaciones del primero, salvo quizá la k-ésima. Pero como satisface la k-ésima del segundo, se cumple:

$$\lambda\cdot a_{k1}\cdot\alpha_1+\lambda\cdot a_{k2}\cdot\alpha_2+\ldots+\lambda\cdot a_{kn}\cdot\alpha_n=\lambda\cdot c_k$$

Como $\lambda\neq 0$, dividiendo ambos miembros de esta identidad por λ, queda:

$$a_{k1}\cdot\alpha_1+a_{k2}\cdot\alpha_2+\ldots+a_{kn}\cdot\alpha_n=c_k$$

Luego $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ satisface también la k-ésima ecuación del primer sistema y, por tanto, es solución particular de éste.

Ahora bien, si toda solución particular del primer sistema es solución del segundo, y viceversa, entonces ambos sistemas tienen la misma solución general. Por tanto, son equivalentes.

3ª) A la p-ésima ecuación del primer sistema le hemos sumado la q-ésima multiplicada por λ para obtener el segundo sistema:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}\cdot x_1+a_{p2}\cdot x_2+\ldots+a_{pn}\cdot x_n=c_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\cdot x_1+a_{q2}\cdot x_2+\ldots+a_{qn}\cdot x_n=c_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=c_m \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{p1}+\lambda\cdot a_{q1})\cdot x_1+(a_{p2}+\lambda\cdot a_{q2})\cdot x_2+\ldots+(a_{pn}+\lambda\cdot a_{qn})\cdot x_n=c_p+\lambda\cdot c_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{q1}\cdot x_1+a_{q2}\cdot x_2+\ldots+a_{qn}\cdot x_n=c_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=c_m \end{array}\right\}$$

• Si la n-tupla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ es solución particular del primer sistema, entonces satisface todas las ecuaciones del segundo, salvo

quizá la p-ésima. Pero como satisface las ecuaciones p-ésima y q-ésima del primero, se cumple:

$$a_{p1}\cdot\alpha_1+a_{p2}\cdot\alpha_2+\ldots+a_{pn}\cdot\alpha_n=c_p$$
$$a_{q1}\cdot\alpha_1+a_{q2}\cdot\alpha_2+\ldots+a_{qn}\cdot\alpha_n=c_q$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta segunda identidad por λ y el resultado se lo sumamos miembro a miembro a la primera identidad, queda:

$$(a_{p1}+\lambda\cdot a_{q1})\cdot\alpha_1+(a_{p2}+\lambda\cdot a_{q2})\cdot\alpha_2+\ldots+(a_{pn}+\lambda\cdot a_{qn})\cdot\alpha_n=c_p+\lambda\cdot c_q$$

Luego $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ satisface también la p-ésima ecuación del segundo sistema y, en consecuencia, es solución particular de éste.

• Si la n-tupla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ es solución particular del segundo sistema, entonces satisface todas las ecuaciones del primero, salvo quizá la p-ésima. Pero como satisface las ecuaciones p-ésima y q-ésima del segundo sistema, se verifica:

$$(a_{p1}+\lambda\cdot a_{q1})\cdot\alpha_1+(a_{p2}+\lambda\cdot a_{q2})\cdot\alpha_2+\ldots+(a_{pn}+\lambda\cdot a_{qn})\cdot\alpha_n=c_p+\lambda\cdot c_q$$
$$a_{q1}\cdot\alpha_1+a_{q2}\cdot\alpha_2+\ldots+a_{qn}\cdot\alpha_n=c_q$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta segunda identidad por λ y el resultado se lo restamos miembro a miembro a la primera identidad, resulta:

$$a_{p1}\cdot\alpha_1+a_{p2}\cdot\alpha_2+\ldots+a_{pn}\cdot\alpha_n=c_p$$

Luego $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ satisface también la ecuación p-ésima del primer sistema y, en consecuencia, es solución particular de éste.

Ahora bien, si toda solución particular del primer sistema es solución del segundo, y viceversa, entonces ambos sistemas tienen la misma solución general. Por tanto son equivalentes.

2.- Problemas

1) Cuáles son las transformaciones reciprocas de las siguientes:

a) Multiplicar la segunda ecuación de un sistema por -3/5.

b) Sumar a la segunda ecuación de un sistema la quinta multiplicada por -3.

c) Cambiar entre sí de posición las dos primeras ecuaciones de un sistema.

d) Eliminar una ecuación trivial de un sistema.