Índice: Sistemas con parámetro. Problemas.

1.- Sistemas con parámetro

Son sistemas en los que algunos coeficientes y términos independientes dependen de un parámetro.[1] Se trata, pues, de resolver, no un sistema, sino infinitos sistemas a la vez, uno por cada valor del parámetro.

Por ejemplo, resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax-2y+z=1 \\ x-2ay+z=-2 \\ x-2y+az=1 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ 1 & -2 & a & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a & -3 \\ 0 & 2a-2 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \overset{4}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & a & 1 \\ 0 & \mathbf{2-2a} & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{2-a-a^2} & -2-a \end{array}\right) \overset{5}{\rightarrow} \begin{cases} 2-2a=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \\ a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2} \Rightarrow a=-2,\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2,[6] el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow z=-1-2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1+2y+2z=1+2y-2-4y=-1-2y \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=1,[6] el sistema es incompatible:[8]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

---

[1] Pueden también depender de más de un parámetro. Aquí nos reduciremos al estudio de los sistemas que dependen de un parámetro.
[2] 1ªf↔3ªf.
[3] 2ªf-1ªf; 3ªf-a·1ªf.
[4] 3ªf+2ªf.
[5] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 3º).
[6] Sustituimos el valor de a en el sistema escalonado que hemos obtenido (no en el de partida).
[7] 2ªf·1/3; eliminamos la última fila.
[8] No es necesario calcular el sistema escalonado para verlo.

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:[1]

$$\left.\begin{array}{r}x-2y+az=1\\(2-2a)y+(1-a)z=-3\\(2-a-a^2)z=-2-a\end{array}\right\}\overset{2}{\Rightarrow} z=\frac{-2-a}{2-2a-a^2}=\frac{-(a+2)}{-(a+2)(a-1)}\Rightarrow\boxed{z=\frac{1}{a-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-2a)y=-3+(a-1)z=-3+(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}=-3+1=-2\overset{3}{\Rightarrow} y=\frac{-2}{-2(a-1)}\Rightarrow\boxed{y=\frac{1}{a-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1+2y-az=1+\frac{2}{a-1}-\frac{a}{a-1}=\frac{a-1+2-a}{a-1}\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{a-1}}$$

* * *

Por ejemplo, resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}mx+y+z=m\\mx+m^2y+m^2z=m\\mx+my+m^2z=m\end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}m&1&1&m\\m&m^2&m^2&m\\m&m&m^2&m\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}m&1&1&m\\0&m^2-1&m^2-1&0\\0&m-1&m^2-1&0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}m&1&1&m\\0&m-1&m^2-1&0\\0&m^2-1&m^2-1&0\end{array}\right)\overset{6}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{m}&1&1&m\\0&\mathbf{m-1}&m^2-1&0\\0&0&\mathbf{-m(m^2-1)}&0\end{array}\right)\overset{7}{\rightarrow}\begin{cases}m=0\\m-1=0\Rightarrow m=1\\-m(m^2-1)=0\Rightarrow m=0,\ m=\pm1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si m=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&-1\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\overset{8}{\rightarrow}\begin{cases}-x+y+z=-1\\-2y=0\end{cases}\Rightarrow y=0\Rightarrow x=1+y+z=1+z\Rightarrow\begin{cases}x=1+\alpha\\y=0\\z=\alpha\end{cases}$$

2º) Si m=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:[9]

---

[1] Recuerda que para cada valor de a estamos resolviendo un sistema distinto; por ejemplo, cuando a=2, la solución es x=1, y=1, z=1. Por tanto, cuando a=2, el sistema es compatible determinado. Y lo mismo sucede con los demás valores de a, excepto a=-2 y a=1. No se confunda, pues, el parámetro de que depende el sistema con los parámetros de que depende la solución.

[2] Como a no es ni 1 ni -2, podemos despejar z.

[3] Como a≠1, podemos despejar y.

[4] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

[5] 2ªf↔3ªf.

[6] 3ªf-(m+1)·2ªf.

[7] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

[8] Escribimos directamente el sistema escalonado.

[9] Observa que la variable x puede tomar cualquier valor, pues todos sus coeficientes son 0.

$$\begin{pmatrix}0&1&1&|&0\\0&-1&-1&|&0\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\overset{1}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&1&|&0\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2} y+z=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=-\beta\\z=\beta\end{cases}$$

3º) Si m=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&|&1\\0&0&0&|&0\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2} x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases}x=1-\alpha-\beta\\y=\alpha\\z=\beta\end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}mx+y+z=m\\(m-1)y+(m^2-1)z=0\\-m(m^2-1)z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{z=0}\Rightarrow (m-1)y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}\Rightarrow mx=m \Rightarrow \boxed{x=1}$$

* * *

Conviene conocer otras formas de resolver este mismo sistema que pueden servir en la resolución de otros sistemas semejantes:[3]

1ª)

$$\begin{pmatrix}m&1&1&|&m\\m&m^2&m^2&|&m\\m&m&m^2&|&m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}m&1&1&|&m\\0&m^2-1&m^2-1&|&0\\0&m-1&m^2-1&|&0\end{pmatrix}\overset{4}{\sim}\begin{pmatrix}m&1&1&|&m\\0&m-1&(m^2-1)(1-m)&|&0\\0&m-1&m^2-1&|&0\end{pmatrix}\overset{5}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}\mathbf{m}&1&1&|&m\\0&\mathbf{m-1}&(m^2-1)(1-m)&|&0\\0&0&\mathbf{m(m^2-1)}&|&0\end{pmatrix}\to\begin{cases}m=0\\m-1=0\Rightarrow m=1\\m(m^2-1)=0\Rightarrow m=0,\ m=\pm1\end{cases}$$

El estudio de los distintos casos es igual que antes.

2ª)

$$\begin{pmatrix}m&1&1&|&m\\m&m^2&m^2&|&m\\m&m&m^2&|&m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}m&1&1&|&m\\0&m^2-1&m^2-1&|&0\\0&m-1&m^2-1&|&0\end{pmatrix}\overset{6}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&z&y\end{array}\\\begin{pmatrix}m&1&1&|&m\\0&m^2-1&m^2-1&|&0\\0&m^2-1&m-1&|&0\end{pmatrix}\end{array}\overset{5}{\sim}$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&z&y\end{array}\\\begin{pmatrix}\mathbf{m}&1&1&|&m\\0&\mathbf{m^2-1}&m^2-1&|&0\\0&0&\mathbf{m-m^2}&|&0\end{pmatrix}\end{array}\to\begin{cases}m=0\\m^2-1=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1\\m-m^2=0\Rightarrow m(1-m)=0\Rightarrow m=0,\ m=1\end{cases}$$

Al estudiar los distintos casos hay que tener cuidado a la hora de escribir las ecuaciones, ya que hemos cambiado de posición las dos

---

[1] Como el sistema no es escalonado, aplicamos Gauss: 2ªf+1ªf; eliminamos la 3ªf.
[2] Escribimos directamente el sistema escalonado.
[3] No justificamos el primer paso, pues coincide con el dado antes.
[4] 2ªf-m·3ªf.
[5] 3ªf-2ªf.
[6] 2ªc↔3ªc. Esto supone un cambio de posición de las incógnitas y y z, que conviene señalar como hemos hecho, pues, de lo contrario, se corre el peligro de olvidarlo luego; por eso no es recomendable esta alternativa, salvo que simplifique los cálculos, como en este caso.

últimas incógnitas.

3ª) Este procedimiento y los que siguen no son recomendables, salvo que no dispongamos de otra alternativa mejor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 & (m^2-1)(m+1) & 0 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{m} & 1 & 1 & m \\ 0 & \mathbf{m^2-1} & m^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m(m^2-1)} & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} m=0 \\ m^2-1=0 \Rightarrow m=\pm 1 \\ m(m^2-1)=0 \Rightarrow m=0,\ m=\pm 1 \end{cases}$$

Ahora habría que estudiar primero el caso m=-1, pero no en el sistema escalonado que hemos obtenido, sino en el de partida;[3] y luego los demás casos como siempre.

Veamos el caso m=-1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\to} \begin{cases} -x+y+z=-1 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=1+z \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases}$$

Si hubiésemos estudiado el caso m=-1 en el sistema escalonado, habríamos cometido un error:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\to} -x+y+z=-1 \Rightarrow x=1+y+z \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4ª) Este procedimiento es similar al anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{m} & 1 & 1 & m \\ 0 & \mathbf{m-1} & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m^2-m} & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ m(m-1)=0 \Rightarrow m=0,\ m=1 \end{cases}$$

El caso m=-1 se estudia igual que antes, o sea, en el sistema de partida o en el inmediatamente anterior al paso señalado con la nota 7. Aquí el error que se puede cometer es olvidarse de dicho caso, al no anular ese valor a los pivotes.

---

[1] 3ªf·(m+1). Evidentemente, este paso no puede darse, ya que m+1 no siempre es distinto de cero (como exige la segunda transformación elemental). Pues bien, lo que se hace es suponer que m≠-1 y estudiar el caso m=-1 aparte.
[2] 3ªf-2ªf.
[3] O, si se prefiere, en el inmediatamente anterior al paso señalado con la nota 1, pues es en ese paso en el que hemos necesitado suponer m≠-1.
[4] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf. Si se utiliza el sistema indicado en la nota anterior, sobra este paso.
[5] Escribimos directamente el sistema escalonado.
[6] Error que no dejaría de serlo aunque el resultado coincidiese con el correcto.
[7] 2ªf·1/(m+1). Para poder dar este paso suponemos m≠-1 y estudiamos el caso m=-1 aparte.

5ª) Parecido a los dos anteriores es el siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m+1 & 0 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=0 \end{cases}$$

Los casos m=-1 y m=1 se estudian igual que antes, en el sistema de partida o en el inmediatamente anterior al paso señalado con la nota 1. Aquí el error que se puede cometer es olvidarse de estudiarlos al no anular esos valores a los pivotes.

6ª) Similar a los anteriores es el siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 1 & m & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ m & 1 & 1 & m \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 0 \end{array}\right) \overset{6}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ 1-m^2=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1 \end{cases}$$

El caso m=0 se estudia en el sistema de partida. Aquí el error que se puede cometer es olvidarse de estudiarlo al no anular ese valor a los pivotes.

2.- Problemas

1) Discute y resuelve los siguientes sistemas, según sea el valor del parámetro:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \\ 3x+2y=a \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+y=3 \\ x+ay=4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+y=a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y=3 \\ ax+y+z=0 \\ 2x+az=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y+at=1 \\ y+z+t=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+ky-z=-2 \\ x+2y+kz=1 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x-3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} 2x-ky+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ kx-y+13z=0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+y+az=4 \\ x+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+(1+a)y+z=2a \\ x+y+(1+a)z=0 \end{cases}$ **l)** $\begin{cases} (a+1)x+y+z=a+1 \\ x+(a+1)y+z=a+3 \\ x+y+(a+1)z=-2a-4 \end{cases}$

---

[1] 2ªf·1/(m^2-1); 3ªf·1/(m-1). Para poder dar este paso suponemos m≠±1 y estudiamos estos casos aparte.
[2] 3ªf-2ªf.
[3] 2ªf·1/m; 3ªf·1/m. Para poder dar este paso suponemos m≠0 y estudiamos este caso aparte.
[4] 1ªf↔3ªf.
[5] 2ªf-1ªf; 3ªf-m·1ªf.
[6] 3ªf+2ªf.

m) $\begin{cases} x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2(a+1) \\ ax+y+z=a \end{cases}$

n) $\begin{cases} (2+a)x+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky+8z=3 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2y-z=k \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=k \end{cases}$

p) $\begin{cases} 2x+y+z+t=0 \\ kx-2y+3z+4t=0 \\ 3x-y-z+4t=0 \\ -2x+4y-z-9t=0 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2x+y-4z=k+1 \\ -x+5y-z=k-12 \\ x+6y-5z=k+2 \\ 2x-4y+5z=k \end{cases}$

r) $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ -x+y+2z=3 \\ 5x+ky-4z=-1 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 2x+y-4z=m \\ 3x-y=11 \\ y+z=6 \\ 2y-z=m \end{cases}$

t) $\begin{cases} (-7-m)x+6y+6z=0 \\ -3x+(2-m)y+3z=0 \\ -6x+6y+(5-m)z=0 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 3x+10y+4z=0 \\ mx+y-z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$

v) $\begin{cases} x+ay-z=1 \\ 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{cases}$

w) $\begin{cases} (a-3)x+4z=2 \\ x-2z=-1 \\ -x+ay+2z=a \end{cases}$

x) $\begin{cases} ax-ay+az=a \\ (3-2a)z=1 \\ x+(a-1)y=0 \end{cases}$

y) $\begin{cases} ay+(a+1)z=a \\ ax+z=a \\ x+az=a \end{cases}$

z) $\begin{cases} ay+az=0 \\ x+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{cases}$