Índice: Demostración de las propiedades del producto de matrices. Problemas.

1.- Demostración de las propiedades del producto de matrices

1ª) Asociativa: si $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$ son tres matrices de órdenes $m\times n$, $n\times p$ y $p\times q$, respectivamente, entonces $[A\cdot B]\cdot C=A\cdot[B\cdot C]$.

En efecto, si $A\cdot B=(d_{ij})$ y $B\cdot C=(f_{ij})$, tenemos lo siguiente:[1]

$$[A\cdot B]\cdot C \overset{2}{=} (d_{i1}\cdot c_{1j}+d_{i2}\cdot c_{2j}+\ldots+d_{ip}\cdot c_{pj}) \overset{3}{=}$$
$$=([a_{i1}\cdot b_{11}+a_{i2}\cdot b_{21}+\ldots+a_{in}\cdot b_{n1}]\cdot c_{1j}+[a_{i1}\cdot b_{12}+a_{i2}\cdot b_{22}+\ldots+a_{in}\cdot b_{n2}]\cdot c_{2j}+\ldots+$$
$$+[a_{i1}\cdot b_{1p}+a_{i2}\cdot b_{2p}+\ldots+a_{in}\cdot b_{np}]\cdot c_{pj}) \overset{4}{=} (a_{i1}\cdot[b_{11}\cdot c_{1j}+b_{12}\cdot c_{2j}+\ldots+b_{1p}\cdot c_{pj}]+$$
$$+a_{i2}\cdot[b_{21}\cdot c_{1j}+b_{22}\cdot c_{2j}+\ldots+b_{2p}\cdot c_{pj}]+\ldots+a_{in}\cdot[b_{n1}\cdot c_{1j}+b_{n2}\cdot c_{2j}+\ldots+b_{np}\cdot c_{pj}]) \overset{5}{=}$$
$$=(a_{i1}\cdot f_{1j}+a_{i2}\cdot f_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot f_{nj}) \overset{6}{=} A\cdot[B\cdot C]$$

2ª) Distributiva:

- Si A es una matriz de orden $m\times n$, y las matrices B y C son de orden $n\times p$, entonces $A\cdot[B+C]=A\cdot B+A\cdot C$.
- Si A y B son dos matrices de orden $m\times n$ y C es una matriz de orden $n\times p$, entonces $[A+B]\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

En efecto, si $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$, tenemos lo siguiente:

$$A\cdot[B+C] \overset{7}{=} (a_{i1}\cdot[b_{1j}+c_{1j}]+a_{i2}\cdot[b_{2j}+c_{2j}]+\ldots+a_{in}\cdot[b_{nj}+c_{nj}]) \overset{8}{=}$$
$$=(a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i1}\cdot c_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i2}\cdot c_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}+a_{in}\cdot c_{nj}) \overset{9}{=} ([a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+$$
$$+a_{in}\cdot b_{nj}]+[a_{i1}\cdot c_{1j}+a_{i2}\cdot c_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot c_{nj}]) \overset{10}{=} (a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj})+$$
$$+(a_{i1}\cdot c_{1j}+a_{i2}\cdot c_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot c_{nj}) \overset{11}{=} A\cdot B+A\cdot C$$

[1] Reservamos los paréntesis para las matrices. Cuando sea necesario su uso, utilizaremos en su lugar corchetes.
[2] El elemento ij-ésimo de la matriz $[A\cdot B]\cdot C$ se obtiene multiplicando la i-ésima fila de $A\cdot B$ por la j-ésima columna de C, ambas de p elementos al ser $A\cdot B$ una matriz de orden $m\times p$ y C una matriz de orden $p\times q$.
[3] El elemento d_{i1} de la matriz $A\cdot B$ se obtiene multiplicando la i-ésima fila de la matriz A por la primera columna de la matriz B, ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m\times n$ y B una matriz de orden $n\times p$; lo mismo d_{i2}, etc.
[4] Después de quitar corchetes, sacamos factor común los elementos de la matriz A.
[5] El producto de la primera fila de B por la j-ésima columna de C, ambas de p elementos al ser B una matriz de orden $n\times p$ y C una matriz de orden $p\times q$, es f_{1j}; etc.
[6] El producto de la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de $B\cdot C$, ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m\times n$ y $B\cdot C$ una matriz de orden $n\times q$, es el elemento ij-ésimo de la matriz $A\cdot[B\cdot C]$.
[7] El elemento ij-ésimo de la matriz $A\cdot[B+C]$ se obtiene multiplicando la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B+C, ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m\times n$ y B+C una matriz de orden $n\times p$.
[8] Quitamos corchetes.
[9] Agrupamos los sumandos de otro modo.
[10] Por la definición de suma de matrices.
[11] El producto de la i-ésima fila de A por la j-ésima columnas de B, ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m\times n$ y B una matriz de orden $n\times p$, es el elemento ij-ésimo de la matriz $A\cdot B$. Idem con $A\cdot C$.

Del mismo modo se demuestra que $[A+B]\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

3ª) El elemento neutro del producto de matrices cuadradas de orden n es la matriz unidad de orden n.

En efecto, si $A=(a_{ij})$ e $I_n=(b_{ij})$, tenemos lo siguiente:

$$A\cdot I_n \overset{1}{=} (a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ij}\cdot b_{jj}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}) \overset{2}{=}$$
$$=(a_{i1}\cdot 0+a_{i2}\cdot 0+\ldots+a_{ij}\cdot 1+\ldots+a_{in}\cdot 0)=(a_{ij})=A$$

Del mismo modo se prueba que $I_n\cdot A=A$.

4ª) Si A y B son dos matrices de órdenes $m\times n$ y $n\times p$, respectivamente, entonces $[t\cdot A]\cdot B=t\cdot[A\cdot B]=A\cdot[t\cdot B]$.

En efecto, si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$:

$$[t\cdot A]\cdot B \overset{3}{=} (ta_{i1}\cdot b_{1j}+ta_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+ta_{in}\cdot b_{nj}) \overset{4}{=}$$
$$=(t\cdot[a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}]) \overset{5}{=} t\cdot(a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}) \overset{6}{=} t\cdot[A\cdot B]$$

Del mismo modo se prueba que $A\cdot[t\cdot B]=t\cdot[A\cdot B]$.

2.- Problemas

1) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & k\end{pmatrix}$, determina, según los valores del parámetro k, todas las matrices B tales que $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, calcula:

a) $A\cdot B$ **b)** $B\cdot A$ **c)** $B\cdot C$ **d)** $A\cdot C$
e) $C\cdot A+C\cdot B$ **f)** A^2, A^3, A^n **g)** B^2, B^3, B^n **h)** C^2, C^3, C^n

3) Calcula las potencias enésimas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}\cos a&\operatorname{sen} a\\-\operatorname{sen} a&\cos a\end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix}1&1/a&1/a\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}a&0&a\\0&a&0\\a&0&a\end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{pmatrix}$

4) Demuestra por inducción completa las fórmulas obtenidas en los apartados b, c, d, e y f del ejercicio anterior.

---

[1] El elemento ij-ésimo de la matriz $A\cdot I$ se obtiene multiplicando la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de I, ambas de n elementos al ser ambas matrices cuadradas de orden n.
[2] Ya que todos los elementos de la columna j-ésima de la matriz I son 0, salvo b_{jj}, que vale 1.
[3] El elemento ij-ésimo de la matriz $[t\cdot A]\cdot B$ se obtiene multiplicando la i-ésima fila de $t\cdot A$ por la j-ésima columna de B, ambas de n elementos al ser $t\cdot A$ una matriz de orden $m\times n$ y B una matriz de orden $n\times p$.
[4] Sacamos factor común t.
[5] Por la definición de producto de una matriz por un número real.
[6] El producto de la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B, ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m\times n$ y B una matriz de orden $n\times p$, es el elemento ij-ésimo de la matriz $A\cdot B$.

5) Calcula $A+A^2+A^3+\ldots+A^n$ si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Sean A, B y C tres matrices cualesquiera:

a) Si $A\neq 0$ y $AB=AC$, ¿podemos asegurar que $B=C$?

b) Si $AB=0$, ¿se puede asegurar que $A=0$ o $B=0$?

c) Si $A^2=0$, ¿se puede asegurar que $A=0$?

7) Indica si los pasos de la siguiente demostración son o no correctos. Si lo son, nombra la propiedad que se utiliza para darlos; si no lo son, indica el error cometido (A y B son dos matrices del mismo orden):

$$(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B=A^2+BA-AB-B^2=A^2-B^2$$

8) Si A y B son matrices cuadradas de orden dos, prueba que AB y BA tienen la misma traza.[1]

9) Demuestra que, si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de orden $m\times n$ y $C=(c_{ij})$ es una matriz de orden $n\times p$, entonces $[A+B]\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

10) Demuestra que, si $A=(a_{ij})$, entonces $I\cdot A=A$.

11) Demuestra que, si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de órdenes $m\times n$ y $n\times p$, respectivamente, entonces $A\cdot[t\cdot B]=t\cdot[A\cdot B]$.

[1] Llamamos *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de la diagonal principal.