

Índice: Producto de matrices. Propiedades del producto de matrices. Problemas.

1.- Producto de matrices

a) El producto de una matriz fila de orden $1 \times n$ por una matriz columna de orden $n \times 1$ es una matriz cuadrada de orden 1 que se obtiene de la siguiente manera:

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n)$$

Por ejemplo:

$$(0 \ 1 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = (0 \cdot 3 + 1 \cdot (-7) + 5 \cdot 2) = (3)$$

* * *

Una ecuación lineal $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = c$ puede escribirse como una ecuación matricial de la siguiente forma:

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (c)$$

Por ejemplo, la ecuación $3x - 2y + z = 8$ puede escribirse así:

$$(3 \ -2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (8)$$

b) El producto de una matriz de orden $m \times n$ por una matriz columna de orden $n \times 1$ es una matriz columna de orden $m \times 1$ que se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* * *

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse como una ecuación matricial de la forma $A \cdot X = C$, donde A es

la *matriz de coeficientes* del sistema; X , la matriz columna de las incógnitas y C , la matriz columna de los términos independientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = C_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = C_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = C_m \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C$$

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ x-y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

* * *

Para resolver un sistema como el anterior por el método de Gauss hemos utilizado la matriz $A|C$, llamada *matriz ampliada*:

$$A|C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

c) Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de órdenes $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, se llama *producto* de las matrices A y B , y se escribe $A \cdot B$ o $(a_{ij}) \cdot (b_{ij})$, a la matriz de orden $m \times p$ $(a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj})$.¹

* * *

Por ejemplo:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 & 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa que, si el producto de dos matrices es 0 , ello no implica que una de ellas deba ser 0 .

Si calculamos $B \cdot A$, se comprueba que el producto de matrices no es conmutativo:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si A es una matriz de orden $m \times n$ y B es una matriz de orden $n \times p$, con $m \neq p$, sólo tiene sentido el producto $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Esto es, a la matriz cuyo elemento ij -ésimo es la suma de los productos de los elementos de la fila i -ésima de A por los correspondientes elementos de la columna j -ésima de B , ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m \times n$ y B una matriz de orden $n \times p$. (En lo que sigue simplificaremos diciendo que el elemento ij -ésimo se obtiene multiplicando la i -ésima fila de A por la j -ésima columna de B .)

2.- Propiedades del producto de matrices¹

1ª) Asociativa: si A, B y C son tres matrices de órdenes $m \times n$, $n \times p$ y $p \times q$, respectivamente, entonces $[A \cdot B] \cdot C = A \cdot [B \cdot C]$.

2ª) Distributiva:

- Si A es una matriz de orden $m \times n$, y las matrices B y C son de orden $n \times p$, entonces $A \cdot [B + C] = A \cdot B + A \cdot C$.

- Si A y B son dos matrices de orden $m \times n$ y C es una matriz de orden $n \times p$, entonces $[A + B] \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

3ª) El elemento neutro del producto de matrices cuadradas de orden n es la matriz unidad de orden n: si A es una matriz cuadrada de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden, $A \cdot I = I \cdot A = A$.²

4ª) Si t es un número real y A y B son dos matrices de órdenes $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, entonces: $[t \cdot A] \cdot B = t \cdot [A \cdot B] = A \cdot [t \cdot B]$.

3.- Problemas

1) Escribe los siguientes sistemas de ecuaciones en forma de ecuación matricial:

a)
$$\begin{cases} -3x - 8y + 5z = 0 \\ x + 7y - 5z = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 7x - y = 1 \\ 5x + 2y = -3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - y + 8z + t = -2 \\ x - 3y + 2z + 7t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = -1 \\ 2x - y - 3z - 2t = 5 \end{cases}$$

2) Escribe las siguientes ecuaciones matriciales en forma de sistema de ecuaciones lineales:

a)
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3) Realiza, si es posible, los siguientes productos de matrices:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e)
$$(2 \ -1 \ 3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

f)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

a)
$$\frac{1}{7} (A^2 + 2I)$$

b)
$$A^2 - 7A + 2I$$

¹ Las demostraciones de estas propiedades se verán en la próxima lección.

² Si A es una matriz de orden $m \times n$, la matriz unidad de orden m es el elemento neutro por la izquierda y la matriz unidad de orden n, el elemento neutro por la derecha.

5) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla:

a) $A^3 - 7A^2 + 5A + 4I$

b) $B^3 - B^2$

6) Si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

a) M^2

b) $P = M^2 + I$

c) $P \cdot M$

d) P^2

7) Si A es una matriz idempotente,¹ prueba que la matriz $B = 2A - I$ cumple la condición $B^2 = I$.

8) Prueba que la siguiente matriz es idempotente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) Prueba que la siguiente matriz es periódica,² y calcula su período:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

10) Prueba que la siguiente matriz es involutiva:³

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

11) Prueba que la siguiente matriz es nilpotente,⁴ y calcula su orden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

12) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla los números p y q de modo que $A^2 + pA + qI = 0$.

13) Calcula $X^2 + Y^2$ si X e Y son las matrices solución del siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$4X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X$

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

¹ La matriz cuadrada A es *idempotente* si $A^2 = A$.

² La matriz cuadrada A es *periódica* de periodo n si $A^{n+1} = A$ y n es el menor número natural distinto de cero que verifica dicha igualdad.

³ La matriz cuadrada A es *involutiva* si $A^2 = I$.

⁴ La matriz cuadrada A es *nilpotente* de orden n si $A^{n+1} = 0$ y $A^n \neq 0$.

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{g)} (2 \ -1 \ 0) \cdot X = (0)$$

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{h)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{j)} X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

15) Calcula el elemento neutro por la izquierda y el elemento neutro por la derecha de las siguientes matrices. Comprueba el resultado:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

16) Si A, B y C son las siguientes matrices, calcula los productos A·B, B·C, [A·B]·C y A·[B·C]:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

17) Si A, B y C son las siguientes matrices, halla A·B, A·C, A·[B+C] y A·B+A·C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

18) Si A, B y C son las siguientes matrices, halla A·C, B·C, [A+B]·C y A·C+B·C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

19) Si A y B son las siguientes matrices, halla $I_3 \cdot A$, $A \cdot I_2$, $I_2 \cdot B$ y $B \cdot I_2$ (I_n es la matriz cuadrada de orden n):

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

20) Si A y B son las siguientes matrices, calcula los productos A·B, [2·A]·B, A·[2·B] y 2·[A·B]:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

21) Comprueba que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$