Índice: Suma de matrices. Propiedades de la suma de matrices. Producto de una matriz por un número real. Propiedades del producto de una matriz por un número real. Problemas. Anexo.

1.- Suma de matrices

Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de orden $m\times n$, se llama suma de las matrices A y B, y se representa por A+B o $(a_{ij})+(b_{ij})$, a la matriz de orden $m\times n$ $(a_{ij}+b_{ij})$.[1]

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & -4\\ 1 & -2 & -7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

2.- Propiedades de la suma de matrices

1ª) Asociativa: si $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$ son tres matrices del mismo orden, entonces A+[B+C]=[A+B]+C.

En efecto:[2]

$$A+[B+C]=(a_{ij})+[(b_{ij})+(c_{ij})] \stackrel{3}{=} (a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij}) \stackrel{3}{=} (a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}]) \stackrel{4}{=}$$
$$=([a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij}) \stackrel{3}{=} (a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}) \stackrel{3}{=} [(a_{ij})+(b_{ij})]+(c_{ij})=[A+B]+C$$

2ª) Conmutativa: si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices del mismo orden, entonces A+B=B+A.

En efecto:

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij}) \stackrel{3}{=} (a_{ij}+b_{ij}) \stackrel{5}{=} (b_{ij}+a_{ij}) \stackrel{3}{=} (b_{ij})+(a_{ij})=B+A$$

3ª) El elemento neutro de la suma de matrices de orden $m\times n$ es la matriz nula de orden $m\times n$: si A es una matriz de orden $m\times n$, entonces A+0=A.

En efecto:

$$A+0=(a_{ij})+(0) \stackrel{3}{=} (a_{ij}+0) \stackrel{6}{=} (a_{ij})=A$$

4ª) Toda matriz tiene opuesta: si $A=(a_{ij})$ es una matriz cualquiera, su *matriz opuesta*, que designaremos por –A o $-(a_{ij})$, es $(-a_{ij})$.

---

[1] Esto es, a la matriz cuyo elemento ij-ésimo es la suma de los elementos ij-ésimos de las matrices A y B.
[2] En las demostraciones de esta lección reservamos los paréntesis para las matrices. Cuando sea necesario su uso, utilizaremos en su lugar corchetes. Si se tiene alguna dificultad en seguir estas demostraciones, se pueden ver repetidas con matrices de orden 2×3 en el anexo.
[3] Por la definición de suma de matrices.
[4] Por la propiedad asociativa de la suma de números reales.
[5] Por la propiedad conmutativa de la suma de números reales.
[6] Por la propiedad del elemento neutro de la suma de números reales.

En efecto:

$$A+[-A]=(a_{ij})+(-a_{ij}) \overset{1}{=} (a_{ij}+[-a_{ij}]) \overset{2}{=} (0)=0$$

* * *

Se puede definir una nueva operación: *la resta*. Restar dos matrices es sumar a la primera la opuesta de la segunda: $A-B=A+[-B]$. Una consecuencia de esta definición es que para restar dos matrices se restan elemento a elemento:

$$A-B \overset{3}{=} A+[-B]=(a_{ij})+[-(b_{ij})] \overset{4}{=} (a_{ij})+(-b_{ij}) \overset{1}{=} (a_{ij}+[-b_{ij}]) \overset{5}{=} (a_{ij}-b_{ij})$$

3.- Producto de una matriz por un número real

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de orden $m\times n$ y α es un número real, se llama *producto* de la matriz A por el número real α, y se escribe $\alpha\cdot A$ o $\alpha\cdot(a_{ij})$, a la matriz de orden $m\times n$ $(\alpha\cdot a_{ij})$.[6]

Por ejemplo:

$$2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 4 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

4.- Propiedades del producto de una matriz por un número real

1ª) Si α es un número real y $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices del mismo orden, entonces $\alpha\cdot[A+B]=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$.

En efecto:

$$\alpha\cdot[A+B]=\alpha\cdot[(a_{ij})+(b_{ij})] \overset{1}{=} \alpha\cdot(a_{ij}+b_{ij}) \overset{7}{=} (\alpha\cdot[a_{ij}+b_{ij}]) \overset{8}{=}$$
$$=(\alpha\cdot a_{ij}+\alpha\cdot b_{ij}) \overset{1}{=} (\alpha\cdot a_{ij})+(\alpha\cdot b_{ij}) \overset{7}{=} \alpha\cdot(a_{ij})+ \alpha\cdot(b_{ij})=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$$

2ª) Si α y β son números reales y $A=(a_{ij})$ es una matriz cualquiera, entonces $[\alpha+\beta]\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$.

En efecto:

$$[\alpha+\beta]\cdot A=[\alpha+\beta]\cdot(a_{ij}) \overset{7}{=} ([\alpha+\beta]\cdot a_{ij}) \overset{8}{=} (\alpha\cdot a_{ij}+\beta\cdot a_{ij}) \overset{1}{=}$$
$$=(\alpha\cdot a_{ij})+(\beta\cdot a_{ij}) \overset{7}{=} \alpha\cdot(a_{ij})+\beta\cdot(a_{ij})=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$$

---

[1] Por la definición de suma de matrices.
[2] Por la propiedad del elemento opuesto de la suma de números reales.
[3] Por la definición de resta de matrices.
[4] Por la definición de matriz opuesta.
[5] Por la definición de resta de números reales.
[6] Esto es, a la matriz cuyo elemento ij-ésimo es el producto del número real α por el elemento ij-ésimos de la matriz A.
[7] Por la definición de producto de una matriz por un número real.
[8] Por la propiedad distributiva de los números reales.

3ª) Si α y β son números reales y $A=(a_{ij})$ es una matriz cualquiera, entonces $[\alpha\cdot\beta]\cdot A=\alpha\cdot[\beta\cdot A]$.

En efecto:

$$[\alpha\cdot\beta]\cdot A=[\alpha\cdot\beta]\cdot(a_{ij}) \overset{1}{=} ([\alpha\cdot\beta]\cdot a_{ij}) \overset{2}{=} (\alpha\cdot[\beta\cdot a_{ij}]) \overset{1}{=}$$
$$=\alpha\cdot(\beta\cdot a_{ij}) \overset{1}{=} \alpha\cdot[\beta\cdot(a_{ij})]=\alpha\cdot[\beta\cdot A]$$

4ª) Si $A=(a_{ij})$ es una matriz cualquiera, entonces $1\cdot A=A$.

En efecto:

$$1\cdot A=1\cdot(a_{ij}) \overset{1}{=} (1\cdot a_{ij}) \overset{3}{=} (a_{ij})=A$$

* * *

Estas operaciones permiten escribir de una tercera forma, llamada *expresión vectorial*, la solución general de un sistema de ecuaciones lineales.

Supongamos, por ejemplo, que la expresión paramétrica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales es la siguiente:

$$\begin{cases} x=3-2\alpha+3\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Entonces su expresión vectorial es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.- Problemas

1) Determina la matriz A en cada uno de los siguientes casos:

a) $A=7\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}-6\cdot\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

b) $14\cdot A=3\cdot\left[\begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]+6\cdot\begin{pmatrix} 7 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right]$

2) Halla las matrices X e Y que verifican el sistema:

a) $2\cdot X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};\ X-Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $5\cdot X+3\cdot Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix};\ 3\cdot X+2\cdot Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

[1] Por la definición de producto de una matriz por un número real.
[2] Por la propiedad asociativa del producto de números reales.
[3] Por la propiedad del elemento neutro del producto de números reales.

c) $2\cdot X-3\cdot Y=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$; $3\cdot X+4\cdot Y=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$

6.- Anexo

Para ver más claramente las demostraciones de las propiedades de la suma de matrices y del producto de una matriz por un número real, las repetimos aquí para el caso en el que las matrices A, B y C son de orden 2×3.

a) Propiedades de la suma de matrices:

1ª) Asociativa: A+[B+C]=[A+B]+C.

$$A+[B+C]=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}\right]\overset{1}{=}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13}\\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}\begin{pmatrix}a_{11}+[b_{11}+c_{11}] & a_{12}+[b_{12}+c_{12}] & a_{13}+[b_{13}+c_{13}]\\ a_{21}+[b_{21}+c_{21}] & a_{22}+[b_{22}+c_{22}] & a_{23}+[b_{23}+c_{23}]\end{pmatrix}\overset{2}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}[a_{11}+b_{11}]+c_{11} & [a_{12}+b_{12}]+c_{12} & [a_{13}+b_{13}]+c_{13}\\ [a_{21}+b_{21}]+c_{21} & [a_{22}+b_{22}]+c_{22} & [a_{23}+b_{23}]+c_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}\left[\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}=[A+B]+C$$

2ª) Conmutativa: A+B=B+A.

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{pmatrix}\overset{3}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & b_{13}+a_{13}\\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & b_{23}+a_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}=B+A$$

3ª) Elemento neutro: A+0=A.

$$A+0=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{1}{=}\begin{pmatrix}a_{11}+0 & a_{12}+0 & a_{13}+0\\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & a_{23}+0\end{pmatrix}\overset{4}{=}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}=A$$

4ª) Elemento opuesto: A+[-A]=0.

$$A+[-A]=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+[-a_{11}] & a_{12}+[-a_{12}] & a_{13}+[-a_{13}]\\ a_{21}+[-a_{21}] & a_{22}+[-a_{22}] & a_{23}+[-a_{23}]\end{pmatrix}\overset{5}{=}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

* * *

[1] Por la definición de suma de matrices.
[2] Por la propiedad asociativa de la suma de números reales.
[3] Por la propiedad conmutativa de la suma de números reales.
[4] Por la propiedad del elemento neutro de la suma de números reales.
[5] Por la propiedad del elemento opuesto de la suma de números reales.

b) Propiedades del producto de una matriz por un número real:

1ª) $\alpha\cdot[A+B]=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$.

$$\alpha\cdot[A+B]=\alpha\cdot\left[\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}\right]\overset{1}{=}\alpha\cdot\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\end{pmatrix}\overset{2}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cdot[a_{11}+b_{11}]&\alpha\cdot[a_{12}+b_{12}]&\alpha\cdot[a_{13}+b_{13}]\\\alpha\cdot[a_{21}+b_{21}]&\alpha\cdot[a_{22}+b_{22}]&\alpha\cdot[a_{23}+b_{23}]\end{pmatrix}\overset{3}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11}+\alpha\cdot b_{11}&\alpha\cdot a_{12}+\alpha\cdot b_{12}&\alpha\cdot a_{13}+\alpha\cdot b_{13}\\\alpha\cdot a_{21}+\alpha\cdot b_{21}&\alpha\cdot a_{22}+\alpha\cdot b_{22}&\alpha\cdot a_{23}+\alpha\cdot b_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11}&\alpha\cdot a_{12}&\alpha\cdot a_{13}\\\alpha\cdot a_{21}&\alpha\cdot a_{22}&\alpha\cdot a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\cdot b_{11}&\alpha\cdot b_{12}&\alpha\cdot b_{13}\\\alpha\cdot b_{21}&\alpha\cdot b_{22}&\alpha\cdot b_{23}\end{pmatrix}\overset{2}{=}$$

$$=\alpha\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$$

2ª) $[\alpha+\beta]\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$.

$$[\alpha+\beta]\cdot A=[\alpha+\beta]\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\overset{2}{=}\begin{pmatrix}[\alpha+\beta]\cdot a_{11}&[\alpha+\beta]\cdot a_{12}&[\alpha+\beta]\cdot a_{13}\\{}[\alpha+\beta]\cdot a_{21}&[\alpha+\beta]\cdot a_{22}&[\alpha+\beta]\cdot a_{23}\end{pmatrix}\overset{3}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11}+\beta\cdot a_{11}&\alpha\cdot a_{12}+\beta\cdot a_{12}&\alpha\cdot a_{13}+\beta\cdot a_{13}\\\alpha\cdot a_{21}+\beta\cdot a_{21}&\alpha\cdot a_{22}+\beta\cdot a_{22}&\alpha\cdot a_{23}+\beta\cdot a_{23}\end{pmatrix}\overset{1}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cdot a_{11}&\alpha\cdot a_{12}&\alpha\cdot a_{13}\\\alpha\cdot a_{21}&\alpha\cdot a_{22}&\alpha\cdot a_{23}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\cdot a_{11}&\beta\cdot a_{12}&\beta\cdot a_{13}\\\beta\cdot a_{21}&\beta\cdot a_{22}&\beta\cdot a_{23}\end{pmatrix}\overset{2}{=}$$

$$=\alpha\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$$

3ª) $[\alpha\cdot\beta]\cdot A=\alpha\cdot[\beta\cdot A]$.

$$[\alpha\cdot\beta]\cdot A=[\alpha\cdot\beta]\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\overset{2}{=}\begin{pmatrix}[\alpha\cdot\beta]\cdot a_{11}&[\alpha\cdot\beta]\cdot a_{12}&[\alpha\cdot\beta]\cdot a_{13}\\{}[\alpha\cdot\beta]\cdot a_{21}&[\alpha\cdot\beta]\cdot a_{22}&[\alpha\cdot\beta]\cdot a_{23}\end{pmatrix}\overset{4}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cdot[\beta\cdot a_{11}]&\alpha\cdot[\beta\cdot a_{12}]&\alpha\cdot[\beta\cdot a_{13}]\\\alpha\cdot[\beta\cdot a_{21}]&\alpha\cdot[\beta\cdot a_{22}]&\alpha\cdot[\beta\cdot a_{23}]\end{pmatrix}\overset{2}{=}$$

$$=\alpha\cdot\begin{pmatrix}\beta\cdot a_{11}&\beta\cdot a_{12}&\beta\cdot a_{13}\\\beta\cdot a_{21}&\beta\cdot a_{22}&\beta\cdot a_{23}\end{pmatrix}\overset{2}{=}\alpha\cdot\left[\beta\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\right]=\alpha\cdot[\beta\cdot A]$$

4ª) $1\cdot A=A$.

En efecto:

$$1\cdot A=1\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\overset{2}{=}\begin{pmatrix}1\cdot a_{11}&1\cdot a_{12}&1\cdot a_{13}\\1\cdot a_{21}&1\cdot a_{22}&1\cdot a_{23}\end{pmatrix}\overset{5}{=}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}=A$$

[1] Por la definición de suma de matrices.
[2] Por la definición de producto de una matriz por un número real.
[3] Por la propiedad distributiva de los números reales.
[4] Por la propiedad asociativa del producto de números reales.
[5] Por la propiedad del elemento neutro del producto de números reales.