Índice: Matrices invertibles. Propiedades de las matrices invertibles. Problemas.

1.- Matrices invertibles

La matriz cuadrada A es *invertible* si existe una matriz cuadrada del mismo orden, B, llamada *inversa* de A, tal que $A\cdot B=B\cdot A=I$.

Las matrices invertibles se llaman también *regulares*, y las que no son invertibles, *singulares*.

2.- Propiedades de las matrices invertibles

1ª) La inversa de A, si existe, es única.

En efecto, si B y C son inversas de A, $A\cdot B=B\cdot A=I$ y $A\cdot C=C\cdot A=I$. Pero entonces:

$$B\cdot[A\cdot C] \overset{1}{=} [B\cdot A]\cdot C \overset{2}{\Rightarrow} B\cdot I=I\cdot C \overset{3}{\Rightarrow} B=C$$

Como la inversa de A, si existe, es única, se designa por A^{-1}.

2ª) $(A^{-1})^{-1}=A$.

En efecto:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$$

3ª) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

En efecto:

$$A\cdot B\cdot B^{-1}\cdot A^{-1} \overset{4}{=} A\cdot I\cdot A^{-1} \overset{3}{=} A\cdot A^{-1} \overset{5}{=} I$$
$$B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A\cdot B \overset{5}{=} B^{-1}\cdot I\cdot B \overset{3}{=} B^{-1}\cdot B \overset{4}{=} I$$

4ª) $(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

En efecto:

$$A'\cdot(A^{-1})' \overset{6}{=} (A^{-1}\cdot A)' \overset{5}{=} I' \overset{7}{=} I$$
$$(A^{-1})'\cdot A' \overset{6}{=} (A\cdot A^{-1})' \overset{5}{=} I' \overset{7}{=} I$$

5ª) Si k es un número real distinto de cero, $(k\cdot A)^{-1}= k^{-1}\cdot A^{-1}$.

En efecto:

$$kA\cdot k^{-1}A^{-1} \overset{8}{=} k\,k^{-1}\cdot AA^{-1} \overset{5}{=} 1\cdot I \overset{9}{=} I$$

---

[1] Por la propiedad asociativa del producto de matrices.
[2] Ya que B y C son inversas de A.
[3] Ya que I es la matriz unidad.
[4] Ya que B^{-1} y B son inversas.
[5] Ya que A^{-1} y A son inversas.
[6] Por las propiedades de las matrices traspuestas.
[7] La traspuesta de I' es I.
[8] Por la 4ª propiedad del producto de matrices.
[9] Por la 4ª propiedad del producto de una matriz por un número real.

$$k^{-1}A^{-1}\cdot kA \overset{1}{=} k^{-1}k\cdot A^{-1}A \overset{2}{=} 1\cdot I \overset{3}{=} I$$

3.- Problemas

1) Si A es invertible, ¿se cumple $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$? ¿Y $(A^3)^{-1}=(A^{-1})^3$?

2) Demuestra por el método de inducción completa que

$$(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)^{-1}= A_n^{-1}\cdot\ldots\cdot A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}$$

3) Prueba que: $(A+B)\cdot A^{-1}\cdot(A-B)=(A-B)\cdot A^{-1}\cdot(A+B)$.

4) Si $A^3=0$, prueba que la inversa de $I+A+A^2$ es $I-A$.

5) Si A es invertible y $B\cdot(2A+I)=A\cdot X\cdot A+B$, despeja la matriz X.

[1] Por la 4ª propiedad del producto de matrices.
[2] Ya que A^{-1} y A son inversas.
[3] Por la 4ª propiedad del producto de una matriz por un número real.