Índice: El método de Gauss. Problemas.

1.- El método de Gauss

Resolveremos los sistemas de ecuaciones lineales por el *método de Gauss*, que consiste en aplicarles las transformaciones elementales hasta obtener sistemas *escalonados* equivalentes.[1]

* * *

Llamaremos *número de ecuaciones fundamentales de un sistema de ecuaciones lineales* al número de ecuaciones compatibles de cualquier sistema escalonado equivalente. Como veremos más adelante, todos los sistemas escalonados equivalentes a uno dado tienen el mismo número de ecuaciones compatibles.

* * *

Veamos algunos ejemplos:

1º)

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x+y-3z=8 \\ x-2y\quad=-1 \end{array}\right\} \overset{2}{\sim} \left.\begin{array}{r} x+y-3z=8 \\ y+z=1 \\ x-2y\quad=-1 \end{array}\right\} \overset{3}{\sim} \left.\begin{array}{r} x+y-3z=8 \\ y+z=1 \\ -3y+3z=-9 \end{array}\right\} \overset{4}{\sim} \left.\begin{array}{r} x+y-3z=8 \\ y+z=1 \\ 6z=-6 \end{array}\right\} \overset{5}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 6z=-6 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow y=1-z=1+1=2 \Rightarrow x=8-y+3z=8-2-3=3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Se trata de un sistema compatible determinado.[6]

La solución se comprueba sustituyéndola en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2-1=1 \\ 3+2+3=8 \\ 3-4=-1 \end{array}\right\}$$

Observa que las operaciones que hemos hecho para resolver el sistema pueden realizarse sin necesidad de escribir explícitamente las

---

[1] Esto siempre es posible (basta fijarse en el procedimiento seguido en los ejercicios que aparecen a continuación para cerciorarse de que así es), pero no siempre se obtiene el mismo sistema escalonado, ya que éste depende del camino seguido para lograrlo.

[2] El primer paso consiste en conseguir que el primer coeficiente de la primera ecuación sea distinto de cero (pivote). Esto lo obtenemos aquí intercambiando las dos primeras ecuaciones (también se puede intercambiar la primera y la última). Podría suceder que todos los coeficientes de la primera incógnita fuesen 0, en cuyo caso el pivote de la primera ecuación tendría que ser el coeficiente de la segunda incógnita, o de la tercera si con la segunda ocurriese lo mismo que con la primera, etc.

[3] El segundo paso consiste en hacer 0 los coeficientes situados debajo del pivote de la primera ecuación. Para ello, a la tercera ecuación le restamos la primera.

[4] Los siguientes pasos consisten en repetir con las demás ecuaciones lo hecho con la primera. Como el segundo coeficiente de la segunda ecuación es distinto de cero (pivote), sólo falta hacer 0 el coeficiente que se encuentra por debajo. Para conseguirlo, a la tercera ecuación le sumamos tres veces la segunda.

[5] Como ya hemos obtenido un sistema escalonado, éste se resuelve como vimos en la primera lección.

[6] Observa que el número de ecuaciones fundamentales coincide con el de incógnitas.

ecuaciones, ya que se reducen a operaciones entre sus coeficientes y términos independientes. Procederemos como sigue:[1]

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x+y-3z=8 \\ x-2y\quad=-1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \end{array}\right) \overset{4}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \overset{5}{\to} \left\{\begin{array}{l} x+y-3z=8 \\ y+z=1 \\ 6z=-6 \end{array}\right.$$

A partir de aquí se procede igual que antes.

2º)

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ x+y-2z=7 \\ 2x-y-z=8 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 8 \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{8}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ y-z=2 \end{array}\right. \Rightarrow y=2+z \Rightarrow x=1+2y-z=1+4+2z-z \overset{9}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x=5+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=\alpha \end{array}\right.$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado y la solución general depende de un parámetro.[10]

La solución se comprueba sustituyéndola en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 5+\alpha-2(2+\alpha)+\alpha=5+\alpha-4-2\alpha+\alpha=1 \\ 5+\alpha+2+\alpha-2\alpha=7 \\ 2(5+\alpha)-(2+\alpha)-\alpha=10+2\alpha-2-\alpha-\alpha=8 \end{array}\right\}$$

3º)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=3 \\ -x-2y+3z=-3 \\ 2x+4y-6z=6 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \overset{11}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{12}{\sim} (1 \;\; 2 \;\; -3|3) \to$$

$$\to x+2y-3z=3 \Rightarrow x=3-2y+3z \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-2\alpha+3\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right.$$

---

[1] Utilizaremos para ello unas tablas, llamadas matrices (que estudiaremos más adelante), formadas con los coeficientes y los términos independientes separados unos de otros por una línea vertical. Simplificaremos también la notación de las justificaciones de cada paso.
[2] 1ªf↔2ªf.
[3] 3ªf-1ªf.
[4] 3ªf+3·2ªf.
[5] Escribimos el sistema escalonado obtenido.
[6] 2ªf-1ªf; 3ªf-2·1ªf.
[7] 3ªf-2ªf.
[8] 2ªf·1/3. Eliminamos la última fila.
[9] Utilizaremos la expresión paramétrica de la solución.
[10] El número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales.
[11] 2ªf+1ªf; 3ªf-2·1ªf.
[12] Eliminamos las dos últimas filas. Este paso no es necesario para poder escribir el sistema escalonado resultante (en este caso, el sistema escalonado consta de una sola ecuación).

Se trata de un sistema compatible indeterminado y su solución general depende de dos parámetros.[1]

La solución se comprueba sustituyéndola en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3-2\alpha+3\beta+2\alpha-3\beta=3 \\ -3+2\alpha-3\beta-2\alpha+3\beta=-3 \\ 6-4\alpha+6\beta+4\alpha-6\beta=6 \end{array}\right\}$$

4º)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-3z=\ 3 \\ -x-2y+3z=-2 \\ 2x+4y-6z=11 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 11 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 0=1 \end{cases}$$

El sistema es incompatible.

En resumen:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas</td><td colspan="2">Nº de ecuaciones fundamentales del sistema[5]</td></tr>
<tr><td>n</td><td>r<n</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nº de ecuaciones incompatibles que quedan después de aplicar el método de Gauss</td><td>0</td><td>El sistema es compatible determinado</td><td>El sistema es compatible indeterminado y la solución depende de n-r parámetros</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">El sistema es incompatible</td></tr>
</table>

2.- Problemas

1) Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-5y+3z=-12 \\ 3x+2y-5z=1 \\ 7x-4y+2z=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x-y=2 \\ 2x+25y=-6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x+y-5z=2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-5z=0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x-y+z-t=7 \\ x+2y+3z+t=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x-y=2 \\ 2x+25y=0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-8y+8z=0 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} 2x+y+3z+t=1 \\ 3x+2y+7z+5t=2 \\ x+2y-9z+11t=2 \end{cases}$

[1] El número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales.
[2] 2ªf+1ªf; 3ªf-2·1ªf.
[3] 3ªf-5·2ªf. Evidentemente, no es necesario este paso ni los siguientes para llegar a la conclusión de que el sistema es incompatible.
[4] Eliminamos la última fila.
[5] O sea, número de ecuaciones compatibles que quedan después de aplicar el método de Gauss.

j) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=12 \\ x+y-z+t=-8 \\ x-y-z+t=-6 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=12 \\ x+y-z+t=-8 \\ x-y-z-t=4 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 3x+4y-6z=0 \\ 3x-11y+12z=0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+y-z-2t+3u=0 \\ -x+2y+2z+3t-2u=0 \\ 2x-y-z+t+u=0 \\ 2x+2y-2z-t-2u=0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x+y+z+t+u=1 \\ x-y+z-t+u=1 \\ x-z+u=-1 \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} x+2y-3z+2t=0 \\ -2x+y+z+t=0 \\ x+z+t=0 \\ 2x+y+2z+2t=0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-4z=2 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-2y=5 \\ 8x+3y=7 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-y+z=1 \\ x+5y-3z=-1 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \end{cases}$

t) $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x+y-z=2 \\ x+y+z=12 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x+6y=15 \end{cases}$

w) $\begin{cases} 4x-2y=5 \\ -6x+3y=1 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 2x+2y+3z-4t=1 \end{cases}$

y) $\begin{cases} 3x+4y+2z-t=5 \\ 2x-5y+4z+5t=-2 \\ 7x-6y+10z+9t=1 \\ 4x-13y+7t=-12 \end{cases}$

z) $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-2y=5 \end{cases}$