

Índice: La ecuación matricial $A \cdot X = I$. Cálculo de la matriz inversa. Caracterización de las matrices invertibles. Problemas.

1.- La ecuación matricial $A \cdot X = I$

Es fácil ver que si A es una matriz cuadrada de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden, entonces $\text{rg}(A|I)=n$. La razón es que se pueden hacer 0 todos los elementos de la matriz A mediante transformaciones elementales de columnas.

Por ejemplo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=2$$

* * *

Al resolver por el método de Gauss-Jordan la ecuación matricial $A \cdot X = I$, donde A y X son matrices cuadradas de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden, sólo pueden presentarse dos casos, ya que, como acabamos de ver, $\text{rg}(A|I)=n$:⁴

1º) $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|I)=n$

2º) $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A|I)=n$

En el primer caso, la ecuación $A \cdot X = I$ es compatible determinada; y en el segundo, incompatible.

2.- Cálculo de la matriz inversa

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n e I , la matriz unidad del mismo orden. Si mediante transformaciones elementales de filas se puede pasar de la matriz $(A|I)$ a la matriz $(I|B)$, también se podrá pasar de la matriz $(B|I)$ a la matriz $(I|A)$.

Veámoslo con un ejemplo:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{6} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{7} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) = (I|B)$$

Si invertimos esta cadena de equivalencias aplicando en cada paso la correspondiente transformación elemental recíproca,⁸ tenemos:

¹ $1^{ac}-5 \cdot 3^{ac}$; $2^{ac}+3 \cdot 3^{ac}$.

² $1^{ac}-2 \cdot 4^{ac}$; $2^{ac}-4^{ac}$.

³ Eliminamos las dos primeras columnas.

⁴ Como $\text{rg}(A|I)=n$, evidentemente no puede darse el caso de que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|I)=r < n$, esto es, la ecuación $A \cdot X = I$ no puede ser compatible indeterminada. Ver la conclusión del apartado 2 de la lección SM-12.

⁵ $1^{af} \leftrightarrow 2^{af}$.

⁶ $1^{af}+2 \cdot 2^{af}$.

⁷ $1^{af} \cdot 1/3$; $2^{af} \cdot (-1/2)$.

⁸ Recuerda que las transformaciones elementales son reversibles.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = (I|A)$$

* * *

Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden:

$$A \cdot B = I \Rightarrow B \cdot A = I$$

En efecto:

Si $A \cdot B = I$, entonces la ecuación matricial $A \cdot X = I$ es compatible determinada y B es su solución (pues la satisface); por tanto, al resolver dicha ecuación por el método de Gauss-Jordan resultará que $(A|I) \sim (I|B)$; pero entonces, como acabamos de ver, $(B|I) \sim (I|A)$; lo que significa que A es la solución de la ecuación matricial $B \cdot X = I$ y, en consecuencia, $B \cdot A = I$.⁴

* * *

Por tanto, para averiguar si una matriz cuadrada A es invertible o no y, en caso afirmativo, calcular su inversa, lo que haremos será resolver por el método de Gauss-Jordan la ecuación matricial $A \cdot X = I$:

- Si es incompatible, entonces A no tiene inversa, ya que no existe B tal que $A \cdot B = I$.
- Si es compatible y B es la solución, entonces $A \cdot B = I$; pero entonces, como acabamos de ver, $B \cdot A = I$; lo que significa que A es invertible y que $B = A^{-1}$; esto es:

$$(A|I) \sim (I|B) \Rightarrow B = A^{-1}$$

* * *

Calculemos, por ejemplo, la inversa de la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{6}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \stackrel{7}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \stackrel{8}{\sim} \\ \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \stackrel{9}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobemos el resultado:

¹ $1^{af} \cdot 3$ y $2^{af} \cdot (-2)$.

² $1^{af} - 2 \cdot 2^{af}$.

³ $2^{af} \leftrightarrow 1^{af}$.

⁴ Esto significa que no será necesario probar que $A \cdot B = I$ y que $B \cdot A = I$ para poder asegurar que la inversa de A es B (y que la inversa de B es A), sino que bastará con probar uno solo de dichos productos.

⁵ Resolvemos la ecuación matricial $A \cdot X = I$.

⁶ $2^{af} - 1^{af}$.

⁷ $1^{af} \cdot 3$.

⁸ $1^{af} + 2 \cdot 2^{af}$.

⁹ $1^{af} \cdot 1/6$; $2^{af} \cdot 1/3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3+2/3 & 2/3-2/3 \\ 1/3-1/3 & 2/3+1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la inversa de la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Como la ecuación $B \cdot X = I$ es incompatible, B no tiene inversa.

* * *

Si A, X y B son matrices cuadradas de orden n y A es invertible, se puede despejar X en las ecuaciones matriciales $A \cdot X = B$ y $X \cdot A = B$ multiplicando ambos miembros por A^{-1} (por la izquierda en la primera y por la derecha en la segunda):

$$\begin{aligned} A \cdot X = B &\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \\ X \cdot A = B &\Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

3.- Caracterización de las matrices invertibles

Si A es una matriz cuadrada de orden n:

$$A \text{ es invertible} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

En efecto:

- Si A es invertible, entonces $\text{rg}(A) = n$; pues si $\text{rg}(A) \neq n$, la ecuación matricial $A \cdot X = I$, donde I es la matriz unidad de orden n, sería incompatible y, por tanto, A no tendría inversa.
- Si $\text{rg}(A) = n$, la ecuación matricial $A \cdot X = I$, donde I es la matriz unidad de orden n, es compatible. Por tanto, A es invertible.

4.- Problemas

1) Calcula, si existe, la inversa de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \text{sen } a & -\cos a \\ \cos a & \text{sen } a \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

¹ Resolvemos la ecuación matricial $B \cdot X = I$.

² $2^a f + 2 \cdot 1^a f$.

$$\text{m)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{o)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{r)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{n)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{p)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{s)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ñ)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{q)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{t)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales ayudándote de la matriz inversa:¹

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Ayudándote de la matriz inversa, resuelve la ecuación $AX=X+I$, donde A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, halla X si $A \cdot X \cdot B = C$.

5) Despeja X e indica en cada caso qué se requiere para poderlo hacer:

$$\text{a)} A \cdot X + B = C$$

$$\text{b)} X \cdot A + X \cdot B = C$$

$$\text{c)} A \cdot X = X + B$$

$$\text{d)} A \cdot X \cdot B = C$$

$$\text{e)} X \cdot A + 2 \cdot X = B$$

$$\text{f)} A \cdot X = B \cdot X$$

6) Resuelve la ecuación $A \cdot X = B \cdot B'$, donde A y B son las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7) Si A es una matriz cuadrada y $A^2 = A + I$, ¿es A invertible?

8) Si A es una matriz cuadrada y $A^2 - 3A = -2I$, demuestra que A es invertible y calcula su inversa en función de A.

9) Si $(B+A)^2 = B^2 + B \cdot A + I$, demuestra que A es invertible y despeja la matriz B.

¹ Evidentemente, es preferible resolverlas directamente como lo hacíamos en la lección SM-12.