JUNIO DE 2015. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax-y=0 \\ -2ax+a^2y+az=-2a \\ -ax+(a^2-1)y+(a+1)z=-a-2 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 0 \\ -2a & a^2 & a & -2a \\ -a & a^2-1 & a+1 & -a-2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-2 & a & -2a \\ 0 & a^2-2 & a+1 & -a-2 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a^2-2} & a & -2a \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & a-2 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^2-2=0 \end{cases} \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-\sqrt{2}$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}-2 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2}-2 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{array}\right)$$

2º) Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$$

3º) Si $a=\sqrt{2}$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}-2 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}-2 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} ax-y=0 \\ (a^2-2)y+az=-2a \\ z=a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=a-2} \Rightarrow (a^2-2)y=-2a-az=-2a-a^2+2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{-a^2}{a^2-2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{a^2}{2-a^2}} \Rightarrow ax=y=\frac{a^2}{2-a^2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a}{2-a^2}}$$

---

1 2ªf+2·1ªf; 3ªf+1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

4 2ªf·1/√2.

5 3ªf+2ªf.

6 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

7 2ªf-2·1ªf.

JUNIO DE 2015. PROBLEMA A2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(1,-2,3) y corta perpendicularmente a la recta

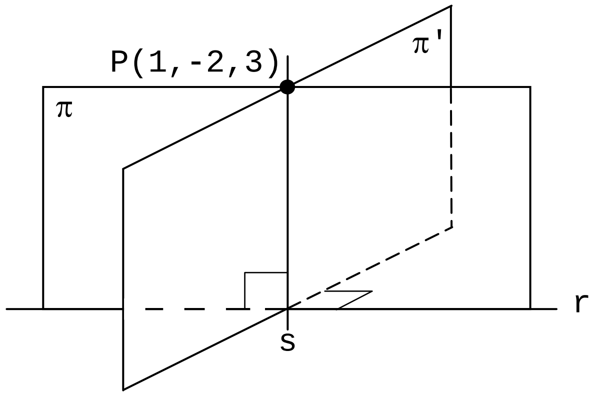
$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-4=0\\3x+y-3z-2=0\end{cases}$$

(2 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:

Sea s la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Vamos a calcular la ecuación de la recta s como intersección de dos planos: el plano π determinado por el punto P y la recta r y el plano π' perpendicular a la recta r que pasa por P:



El plano π pertenece al haz de planos de arista la recta r. Por tanto, su ecuación es:

$$a(x+y+z-4)+b(3x+y-3z-2)=0$$

Y como P pertenece a dicho plano, satisface su ecuación:

$$a(1-2+3-4)+b(3-2-9-2)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2a-10b=0 \Rightarrow a=-5b \Rightarrow -5b(x+y+z-4)+b(3x+y-3z-2)=0 \overset{1}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow -5x-5y-5z+20+3x+y-3z-2=0 \Rightarrow 2x+4y+8z=18 \Rightarrow \pi\equiv x+2y+4z=9$$

Como la recta r viene dada como intersección de dos planos, los vectores característicos de dichos planos son perpendiculares a r. Por tanto, su producto vectorial es un vector direccional de r:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & 1 & 1\\3 & 1 & -3\end{vmatrix}=-4\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}=-2(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})$$

El plano π' tiene por vector característico el vector direccional de r. Por tanto, su ecuación es:

$$2x-3y+z+D=0 \overset{2}{\Rightarrow} 2+6+3+D=0 \Rightarrow D=-11 \Rightarrow \pi'\equiv 2x-3y+z=11$$

Por tanto, la ecuación de la recta s es:[3]

---

[1] Como b≠0 (si b fuese 0, entonces a también; pero a y b no pueden ser simultáneamente unlos), dividimos por b.

[2] Como el punto P pertenece a este plano, satisface su ecuación.

[3] En lugar de lo que sigue, podría calcularse aquí un vector direccional de la recta s multiplicando vectorialmente los vectores característicos de los dos planos que la definen. Así obtendríamos directamente su ecuación continua.

$$\begin{cases} x+2y+4z=9 \\ 2x-3y+z=11 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & -3 & 1 & 11 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{cases} x+2y+4z=9 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9-2y-4z=9-2+2z-4z \\ y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7-2\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \to s\equiv \frac{x-7}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$$

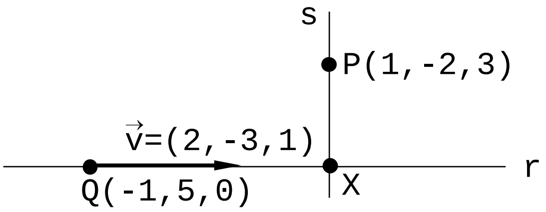
SEGUNDO MÉTODO:

Otro modo de proceder consiste en calcular un vector direccional de s.[3]

Hallamos las ecuaciones paramétricas de r:

$$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 3x+y-3z-2=0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & -10 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{cases} x+y+z=4 \\ y+3z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-y-z=4-5+3z-z \\ y=5-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=5-3\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \to \begin{cases} Q(-1,5,0) \\ \vec{v}(2,-3,1) \end{cases}$$



Una forma de obtener un vector direccional de la recta s es calculando el punto X. En el problema A2 de septiembre de 2009 se ven distintas formas de hallar dicho punto. Aquí vamos a calcular ese vector directamente multiplicando vectorialmente dos vectores perpendiculares a la recta s, el vector $\vec{v}$ y el vector $[\overrightarrow{QP}]\wedge\vec{v}$:

$$[\overrightarrow{QP}]\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

$$([\overrightarrow{QP}]\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=28\vec{i}+14\vec{j}-14\vec{k}=14(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) \Rightarrow s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

1 2ªf-2·1ªf.
2 2ªf·(-1/7).
3 Éste también se puede obtener como se ha indicado en la nota 3 de la págin anterior.
4 2ªf-3·1ªf.
5 2ªf·(-1/2).

JUNIO DE 2015. PROBLEMA A3.

Halla las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x-2}$$ (2 PUNTOS)

1º) El dominio de la función es $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

2º) La recta $x=2$ es asíntota vertical de la función:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2x^2-1}{x-2}=\frac{7}{0^-}=-\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{2x^2-1}{x-2}=\frac{7}{0^+}=+\infty$

3º) La recta $y=2x+4$ es asíntota oblicua de la función en $+\infty$ y $-\infty$:

PRIMER MÉTODO:

- $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-1}{x-2}\overset{1}{=}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x)=\pm\infty$

- $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-1}{x^2-2x}\overset{2}{=}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2=2$

- $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x-2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-1-2x^2+4x}{x-2}=$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-1}{x-2}\overset{3}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}4=4$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como se trata de una función racional (cociente de polinomios), puede hallarse la asíntota oblicua del siguiente modo:

$$\begin{array}{rr|l} 2x^2 & -1 & x-2 \\ \cline{3-3} -2x^2+4x & & 2x+4 \\ \hline & 4x-1 & \\ & -4x+8 & \\ \hline & 7 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x-2}=2x+4+\frac{7}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+4)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7}{x-2}=0$$

---

[1] $2x^2-1\sim 2x^2$ y $x-2\sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común la máxima potencia de x en el numerador y lo mismo en el denominador, simplificando a continuación. O por L'Hôpital. O haciendo la división. Lo mismo puede decirse de los dos límites siguientes.

[2] $2x^2-1\sim 2x^2$ y $x^2-2x\sim x^2$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

[3] $4x-1\sim 4x$ y $x-2\sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

JUNIO DE 2015. PROBLEMA A4.

Dadas las funciones $f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$ y $g(x)=4-4x^2$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo la región cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \\ y=4-4x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)=4-4x^2 \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

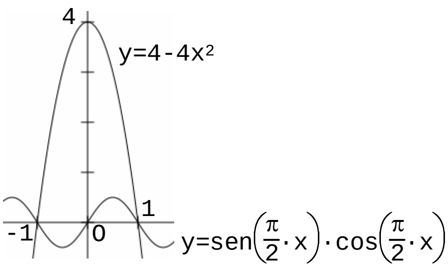
2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
0	0	4

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{1}\left[4-4x^2-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\cdot dx \overset{2}{=} \left(4x-4\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}{2}\right)_{-1}^{1}=$$

$$=\left(4-\frac{4}{3}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\right)-\left(-4+\frac{4}{3}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\right)=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$



---

1 Esta ecuación se resuelve a ojo.

2 Calculamos la correspondiente integral indefinida directamente. La integral de los dos primeros sumandos es inmediata de tipo potencial y la del último, casi inmediata de tipo potencial.

JUNIO DE 2015. PROBLEMA B1.

Encuentra los valores de t para los que el determinante de la matriz A·B vale 0, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{pmatrix}$$ (2 puntos)

Como $|AB|=|A|\cdot|B|$: $|AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$ o $|B|=0$.

Por tanto[1]:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{vmatrix} \overset{2}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} t & 2 \\ 1+t & 3 \end{vmatrix}=2\cdot(3t-2-2t)=2\cdot(t-2)=0 \Rightarrow t=2$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{vmatrix} \overset{3}{=} t\cdot\begin{vmatrix} 2+t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t\cdot(t^2+2t+1)=t\cdot(t+1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-1 \end{cases}$$

Por tanto, los valores de t para los que el determinante de la matriz A·B vale 0 son t=-1, t =0 y t=2.

[1] Otro modo de hacer el ejercicio consiste en calcular la matriz AB y resolver la ecuación que resulta al igualar su determinante a 0.

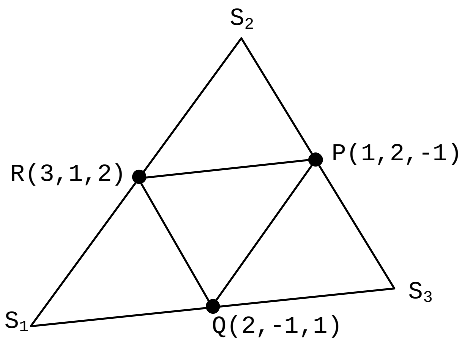
[2] Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.

[3] Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera columna.

Junio de 2015. Problema B2.

Dados los puntos P(1,2,-1), Q(2,-1,1) y R(3,1,2), encuentra todos los posibles puntos S tales que P, Q, R y S son los vértices de un paralelogramo. (3 Puntos)

Si PQ y PR son dos lados del paralelogramo, $S=S_1$; si QP y QR son dos lados del paralelogramo, $S=S_2$ y si RP y RQ son dos lados del paralelogramo, $S=S_3$:



Evidentemente, si $S_1(x,y,z)$, como $RPQS_1$ es un paralelogramo:[1]

$$[\overrightarrow{PR}]=[\overrightarrow{QS_1}] \Rightarrow (3-1,1-2,2+1)=(x-2,y+1,z-1) \Rightarrow \begin{cases} 2=x-2 \\ -1=y+1 \\ 3=z-1 \end{cases} \Rightarrow S_1(4,-2,4)$$

Como R es el punto medio del segmento S_1S_2,[2] si $S_2(x,y,z)$, tenemos lo siguiente:[3]

$$3=\frac{x+4}{2};\ 1=\frac{y-2}{2};\ 2=\frac{z+4}{2} \Rightarrow x=2;\ y=4;\ z=0 \Rightarrow S_2(2,4,0)$$

Como P es el punto medio del segmento S_2S_3,[4] si $S_3(x,y,z)$, tenemos lo siguiente:[5]

$$1=\frac{x+2}{2};\ 2=\frac{y+4}{2};\ -1=\frac{z+0}{2} \Rightarrow x=0;\ y=0;\ z=-2 \Rightarrow S_3(0,0,-2)$$

---

[1] Otra forma de obtener S_1 es calculando el punto medio del segmento QR, que, al ser $RPQS_1$ un paralelogramo, es también el punto medio del segmento PS_1.

[2] Ya que, como $RPQS_1$ y $PQRS_2$ son paralelogramos, $RS_1=PQ=RS_2$.

[3] Otra forma de calcular S_2 es repitiendo lo hecho con el punto S_1.

[4] Ya que, como $PQRS_2$ y $QRPS_3$ son paralelogramos, $PS_2=QR=PS_3$.

[5] Otra forma de calcular S_3 es repitiendo lo hecho con el punto S_1.

JUNIO DE 2015. PROBLEMA B3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)^{3x-1}$$

(2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right) \overset{1}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right)\cdot\left(\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}\right)}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}} \overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+4x-1-5x^2+6x}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}} \overset{3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{10x-1}{\sqrt{5x^2+4x-1}+\sqrt{5x^2-6x}} \overset{4}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(10-1/x)}{x\cdot\left(\sqrt{5+4/x-1/x^2}+\sqrt{5-6/x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10-1/x}{\sqrt{5+4/x-1/x^2}+\sqrt{5-6/x}}=$$

$$=\frac{10-0}{\sqrt{5+0-0}+\sqrt{5-0}}=\frac{10}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)^{3x-1} \overset{5}{=} e^{\lim_{x\to+\infty}\left[(3x-1)\cdot\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}-1\right)\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left[(3x-1)\cdot\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{x^2+3}\right]} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left[(3x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2+3}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-6x-2x+2}{x^2+3}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-8x+2}{x^2+3}} \overset{6}{=} e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^2}} = e^{\lim_{x\to+\infty}6} = e^6$$

---

1 Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.
2 Operamos el numerador.
3 Simplificamos el numerador.
4 Sacamos x factor común en el numerador y en el denominador.
5 Ya que sale la indeterminación $1^{+\infty}$.
6 Ya que $6x^2-8x+2 \sim 6x^2$ y $x^2+3 \sim x^2$ en $+\infty$.

Junio de 2015. Problema B4.

Demuestra que existen $\alpha\in(-1,1)$ y $\beta\in(-1,1)$, $\alpha\neq\beta$, tales que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$, siendo

$$f(x)=(x^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}$$ (3 Puntos)

Evidentemente, $Dom(f)=\mathbb{R}$.

Calculemos la derivada de f:

$$f'(x)=3x^2\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}+$$

$$+(x^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot(3x+2)^{-2/3}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}+$$

$$+(x^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]^{-2/3}\cdot\left[(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]'=$$

$$=3x^2\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}+$$

$$+(x^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}+$$

$$+(x^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2\cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}}\cdot\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+\frac{\pi}{2}\cdot(x-1)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]$$

Por tanto, $Dom(f')=\mathbb{R}-\{-2/3,1,0,\pm2,\pm4\ldots\}$, ya que en algún denominador de f' aparecen $3x+2$, $x-1$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\cdot x=k\pi \Leftrightarrow x=2k,\ \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$, existe $\alpha\in(0,1)\subset(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f(0)=f(1)$:

- $f(0)=1\cdot e^{\sqrt[3]{2}}\cdot 0=0$
- $f(1)=2\cdot e^{\sqrt[3]{5}}\cdot 0=0$

2ª) f es continua en $[0,1]$ por serlo en $\mathbb{R}$, ya que $\forall a$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left[(x^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}\right]=$$

$$=(a^3+1)\cdot e^{\sqrt[3]{3a+2}}\cdot\sqrt[3]{(a-1)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)}=f(a)$$

3ª) f es derivable en $(0,1)$, ya que $(0,1)\subset Dom(f')$.

* * *

Como la función f no es derivable en $x=-2/3$, no es posible repetir en el intervalo $[-1,0]$ lo hecho en el intervalo $[0,1]$.

La alternativa consiste en aplicar el teorema de Bolzano a f', esto es, encontrar entre -2/3 y 0 (o entre -1 y -2/3) dos valores de x en los que f' tenga signos distintos y demostrar que f' es continua en el intervalo cerrado definido por dichos puntos. Veámoslo.

Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo [-1/2,-1/10], existe $\beta\in(-1/2,-1/10)\subset(-1,1)$ tal que $f'(\beta)=0$:

1ª) $f'(-1/2)\cdot f'(-1/10)<0$:

- $f'(-1/2)\simeq 3,3524$
- $f'(-1/10)\simeq -5,2728$

2ª) f' es continua en [-1/2,-1/10]:

- $[-1/2,-1/10]\subset Dom(f')$
- Si $a\in[-1/2,-1/10]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x) \overset{1}{=} \lim_{x\to a}\left[3x^2\cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}+\ldots\right]=$$

$$=3a^2\cdot e^{\sqrt[3]{3a+2}}\cdot\sqrt[3]{(a-1)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)}+\ldots=f'(a)$$

[1] Por su longitud, no escribimos la derivada de f completa.