Índice: La integral indefinida. Linealidad de la integral indefinida. Otra notación de la integral. Problemas. Anexo.

1.- La integral indefinida

Se llama *integral indefinida* de f, y se designa $\int f$, al conjunto de sus primitivas.

Ahora bien, si F es una primitiva de f, sabemos que $\{F+C|C\in R\}$ es el conjunto de todas sus primitivas. Por tanto:[1]

$$\int f=F+C$$

El número C se llama *constante de integración*; y como en la integral definida, f es la *función integrando* y $\int$, el *símbolo integral*.

El proceso de cálculo de las primitivas de f —basta calcular una, pues conocida una, se conocen las demás— se llama *integrar f.*

Si no escribimos la constante de integración, es evidente la siguiente equivalencia:

$$\int f=F \Leftrightarrow F'=f$$

Esto nos permite establecer el siguiente esquema:

$$F \underset{\text{Integrar}}{\overset{\text{Derivar}}{\rightleftarrows}} f$$

Por tanto, derivar e integrar son operaciones recíprocas (salvo la constante de integración), como sumar y restar o multiplicar y dividir.

Consecuencias:

1ª) $\int f'=f$, ya que $f'=f'$.

2ª) $(\int f)'=f$, ya que si $\int f=F+C \Rightarrow (\int f)'=(F+C)'=F'=f$.

2.- Linealidad de la integral indefinida

Si f y g son dos funciones y k es un número real:

a) $\int(k\cdot f)=k\cdot\int f$ **b)** $\int(f+g)=\int f+\int g$

En efecto:

a) $(k\cdot\int f)'=k\cdot(\int f)'=k\cdot f$

b) $(\int f+\int g)'=(\int f)'+(\int g)'=f+g$

[1] No se escribe el símbolo de conjunto, {…}, aunque se sobrentiende.

* * *

Puede demostrarse igualmente que $\int(f-g)=\int f-\int g$.

3.- Otra notación de la integral

Otra forma de expresar la integral, tanto la definida como la indefinida, es la siguiente:[1]

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \qquad\qquad \int f(x)\cdot dx$$

Es la más habitual y la que utilizaremos a partir de ahora.

El símbolo que aparece multiplicando a la función integrando, dx, se lee *diferencial de x*. Esta diferencial siempre es la de la variable de la que depende la función integrando. Ahora bien, como es indiferente qué letra se utiliza como variable independiente, en lugar de $\int \operatorname{sen} x\cdot dx$ puede igualmente escribirse $\int \operatorname{sen} t\cdot dt$, $\int \operatorname{sen} u\cdot du$, etc.

Aunque no vamos a estudiar el concepto de diferencial,[2] es imprescindible conocer la relación que existe entre la diferencial de una función y la de su variable independiente, pues la necesitamos para aplicar el método de integración por sustitución, que veremos más adelante.

Pues bien, la diferencial de una función es igual a su derivada multiplicada por la diferencial de la variable independiente:

$$y=f(x) \Rightarrow dy=f'(x)\cdot dx$$

Por ejemplo:

$$y=\operatorname{sen} x \Rightarrow dy=\cos x\cdot dx$$
$$z=\operatorname{arc\,sen} t \Rightarrow dz=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot dt$$
$$t=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow dt=\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot dx \Rightarrow dt=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$$

Observa que este último cálculo se puede simplificar procediendo de la siguiente manera:

$$t=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2=1-x^2 \Rightarrow 2t\cdot dt=-2x\cdot dx \Rightarrow t\cdot dt=-x\cdot dx$$

El resultado, evidentemente, es el mismo, ya que $t=\sqrt{1-x^2}$.

En general:

$$f(x)=g(t) \Rightarrow f'(x)\cdot dx=g'(t)\cdot dt$$

[1] Es la notación de Leibniz.

[2] Puedes verlo en el anexo de esta lección.

4.- Problemas

1) Demuestra que $\int(f-g)=\int f-\int g$

2) Halla f(x) si f(0)=1, f'(0)=2 y f"(x)=3x.

3) Halla una primitiva de f(x)=sen x cuya gráfica pase por el punto $(\pi,0)$.

4) Si la gráfica de f pasa por el punto (0,2), es tangente en dicho punto a la recta 6x-2y+4=0 y f"(x)=x-3, calcula f.

5) Encuentra la ecuación del movimiento de un punto que se mueve con velocidad constante.

6) Encuentra la ecuación del movimiento de un punto que se mueve con aceleración constante.

7) Comprueba que:

a) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot dx=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

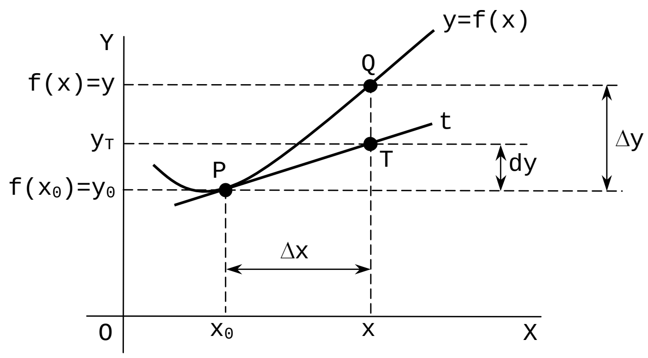
b) $\int\sqrt{x^2+1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

c) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot dx=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$

d) $\int\sqrt{x^2-1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$

5.- Anexo

Consideremos una función, y=f(x), un punto de su gráfica, $P(x_0,y_0)$, y la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, t. Sean Q y T los puntos de las gráficas de la función y de la tangente, respectivamente, de abscisa común $x=x_0+\Delta x$:



A la variación que se produce en el valor de la ordenada al pasar del punto P al punto Q se la denota, como ya sabemos, por Δy:

$$y=y_0+\Delta y$$

Pues bien, a la variación que se produce en el valor de la ordenada al pasar del punto P al punto T se la denota por dy:

$$y_T=y_0+dy$$

Pero como $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ es la ecuación de la recta tangente y el punto T pertenece a dicha recta, resulta lo siguiente:

$$y_T-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \overset{1}{\Rightarrow} y_T=y_0+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

En consecuencia:

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

A dy se le llama *diferencial de la función $y=f(x)$ en x_0*.[2]

Por ejemplo, la diferencial de la función $y=x^3-2x$ en el punto de abscisa $x=0$ es $dy=-2\cdot\Delta x$.

* * *

Ahora bien, así como al estudiar las derivadas distinguíamos entre la derivada de una función en un punto, que era un número, y la derivada, que era una función, del mismo modo ocurre con el concepto de diferencial.

Se llama *diferencial de la función $y=f(x)$*, y se denota por dy o df(x), al producto de su derivada por Δx:

$$dy=df(x)=f'(x)\cdot\Delta x$$

Por ejemplo:

$$y=x^3-2x \Rightarrow dy=d(x^3-2x)=(3x^2-2)\cdot\Delta x$$
$$y=x \Rightarrow dy=dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$$

Este último resultado, sustituyéndolo en la definición de diferencial de una función, nos conduce a la fórmula que necesitábamos:[3]

$$dy=df(x)=f'(x)\cdot dx$$

Y si lo sustituimos en la definición de diferencial de una función en un punto, $dy=f'(x_0)\cdot dx$, permite dar una interpretación geométrica a la notación de la derivada que se utiliza en Física, $dy/dx=f'(x_0)$. Como $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente en x_0, (dx,dy) es un vector direccional de dicha recta tangente.[4]

---

[1] Hemos sustituido $f(x_0)$ por y_0 y $x-x_0$ por Δx.
[2] La diferencial de una función en un punto depende de Δx.
[3] Observa que la diferencial de una función depende de x y de Δx, excepto la diferencial de la función x, dx, que solo depende de Δx. Más aún, coincide con Δx.
[4] Recuerda que la pendiente de una recta se obtiene dividiendo la segunda coordenada del vector direccional entre la primera.