Índice: Propiedad de aditividad del intervalo. Propiedad de monotonía. Problemas.

1.- Propiedad de aditividad del intervalo

Si f es una función continua en [a,b] y $c\in[a,b]$, se verifica:

$$\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f$$

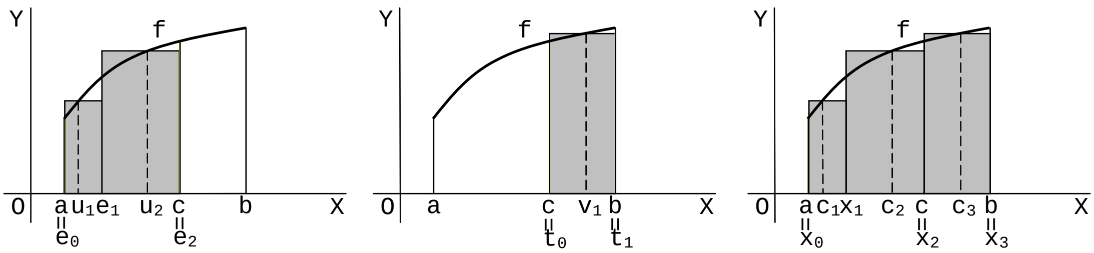
En efecto:

$$\int_a^c f+\int_c^b f \stackrel{1}{=} \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{r} f(u_i)\cdot\Delta e_i+\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{s} f(v_i)\cdot\Delta t_i \stackrel{2}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{r} f(u_i)\cdot\Delta e_i+\sum_{i=1}^{s} f(v_i)\cdot\Delta t_i\right)\stackrel{3}{=}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{m} f(c_i)\cdot\Delta x_i \stackrel{4}{=}\int_a^b f$$

NOTA:

Si, por ejemplo, el primer término de la sucesión $\sum_{i=1}^{r} f(u_i)\cdot\Delta e_i$ está determinado por la partición $P_1=\{e_0,e_1,e_2\}$ y los puntos u_1 y u_2; y el primer término de la sucesión $\sum_{i=1}^{s} f(v_i)\cdot\Delta t_i$ está determinado por la partición $Q_1=\{t_0,t_1\}$ y el punto v_1, entonces el primer término de la sucesión $\sum_{i=1}^{m} f(c_i)\cdot\Delta x_i$ lo estará por la partición $R_1=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$, donde $x_0=e_0$, $x_1=e_1$, $x_2=e_2=c=t_0$ y $x_3=t_1$, y los puntos $c_1=u_1$, $c_2=u_2$ y $c_3=v_1$. Y lo mismo sucede con los demás términos de la sucesión:



* * *

Si la función f es no negativa, la propiedad anterior resulta muy intuitiva. La suma de las dos áreas señaladas es el área total:

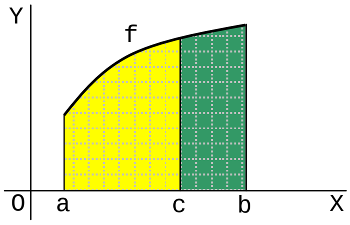
---

[1] $\int_a^c f$ es el límite de una sucesión cuyo término enésimo se obtiene mediante una partición $P_n=\{e_0,e_1,\dots,e_r\}$ del intervalo [a,c] en r partes $(\Delta e_1,\dots,\Delta e_r)$ tal que $\lim|P_n|=0$ y la elección de r puntos u_i tales que, $\forall i\in\{1,2,\dots,r\}$, $u_i\in[e_{i-1},e_i]$. Igualmente, $\int_c^b f$ es el límite de una sucesión cuyo término enésimo queda determinado mediante una partición $Q_n=\{t_0,t_1,\dots,t_s\}$ del intervalo [c,b] en s partes $(\Delta t_1,\dots,\Delta t_s)$ tal que $\lim|Q_n|=0$ y la elección de s puntos v_i tales que, $\forall i\in\{1,2,\dots,s\}$, $v_i\in[t_{i-1},t_i]$.

[2] Por las propiedades de los límites.

[3] Hacemos un simple cambio de notación: por una parte, $e_i=x_i$ y $u_i=c_i$, $\forall i$; por otra, $t_i=x_{r+i}$ y $v_i=c_{r+i}$, $\forall i$ (evidentemente, m=r+s). Este paso se explica en la nota del texto.

[4] Evidentemente, si $\lim|P_n|=0$ y $\lim|Q_n|=0$, entonces $\lim|R_n|=0$. Por tanto, este último límite es la integral definida desde a hasta b de la función f.



* * *

En la propiedad de aditividad del intervalo los límites inferiores son menores que los superiores (a<c<b). Sin embargo, la propiedad es cierta en cualquiera de los casos posibles. Esto es, si f es una función continua en [a,b] y $c\in[a,b]$, se verifica:

1º) $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ **2º)** $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ **3º)** $\int_b^a f + \int_a^c f = \int_b^c f$

4º) $\int_b^c f + \int_c^a f = \int_b^a f$ **5º)** $\int_c^a f + \int_a^b f = \int_c^b f$ **6º)** $\int_c^b f + \int_b^a f = \int_c^a f$

La primera de estas fórmulas es la que acabamos de demostrar. Para probar las demás, basta utilizar la extensión del concepto de integral definida. Veamos, por ejemplo, la segunda fórmula:

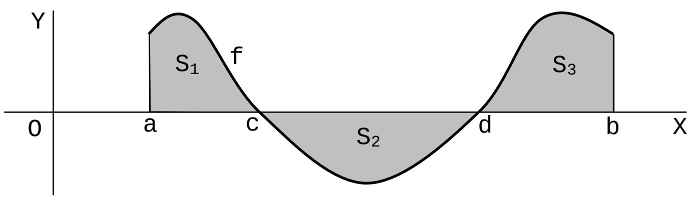
$$\int_a^b f + \int_b^c f \overset{1}{=} \int_a^b f - \int_c^b f \overset{2}{=} \int_a^c f + \int_c^b f - \int_c^b f = \int_a^c f$$

* * *

El significado geométrico de la integral definida desde a hasta b de una función continua cualquiera es la suma “algebraica” de las áreas de las regiones del plano limitadas por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b, considerando positivas las que se encuentran por encima del eje de abscisas y negativas las que se encuentran por debajo.

Si f es la función que aparece dibujada a continuación, es evidente lo siguiente:

$$\int_a^b f \overset{3}{=} \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \overset{4}{=} S_1 - S_2 + S_3$$



[1] Como en la segunda integral el límite inferior es mayor que el superior, cambiamos éstos de posición y a la integral de signo (recuerda la extensión del concepto de integral vista en el primer apartado de la lección anterior).
[2] Por la primera fórmula, ya demostrada.
[3] Por la propiedad de aditividad del intervalo.
[4] Ya hemos visto el significado geométrico de las integrales de funciones continuas no positivas y no negativas.

2.- Propiedad de monotonía

Si f y g son continuas en [a,b] y $f \le g$, se verifica:

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

En efecto:

$$f \le g \Rightarrow 0 \le g-f \overset{1}{\Rightarrow} 0 \le \int_a^b (g-f) \overset{2}{\Rightarrow} 0 \le \int_a^b g - \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$$

3.- Problemas

1) Demuestra las fórmulas 3ª, 4ª, 5ª y 6ª de la propiedad de aditividad del intervalo.

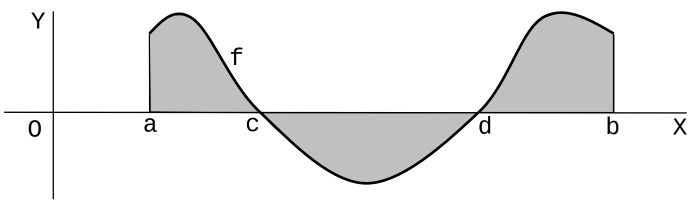
2) ¿Es cierta la propiedad de monotonía en los dos casos siguientes? Justifica la respuesta:

- **a)** Los límites de integración son iguales.
- **b)** El límite inferior es mayor que el superior

3) Si f es continua en [a,b], demuestra la siguiente fórmula:[3]

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

4) Si tuvieses que plantear mediante integrales definidas el cálculo del área señalada de la siguiente figura, ¿qué fórmulas de las que se indican a continuación te parecen correctas?:



a) $\int_a^b f$	**b)** $\int_a^b \lvert f\rvert$	**c)** $\left\lvert\int_a^b f\right\rvert$
d) $\int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f$	**e)** $\int_a^c \lvert f\rvert + \int_c^d \lvert f\rvert + \int_d^b \lvert f\rvert$	**f)** $\left\lvert\int_a^c f\right\rvert + \left\lvert\int_c^d f\right\rvert + \left\lvert\int_d^b f\right\rvert$
g) $\int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^b f$	**h)** $\int_a^c \lvert f\rvert - \int_c^d \lvert f\rvert + \int_d^b \lvert f\rvert$	**i)** $\left\lvert\int_a^c f\right\rvert - \left\lvert\int_c^d f\right\rvert + \left\lvert\int_d^b f\right\rvert$

---

[1] Como g-f es una función no negativa, $\int_a^b (g-f)$ es el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función g-f, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b. Por tanto, un número no negativo.

[2] Por la propiedad de linealidad de la integral definida.

[3] Probar que $|b| \le a$ equivale a demostrar que $-a \le b \le a$. Tienes, pues, primero que cerciorarte de que $-|f| \le f \le |f|$, y aplicar luego la propiedad de monotonía.