Índice: Integración por partes. Problemas.

1.- Integración por partes

Si f y g son dos funciones derivables, tenemos lo siguiente:

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g' \Rightarrow \int(f\cdot g)'=\int f'\cdot g+\int f\cdot g' \Rightarrow f\cdot g=\int f'\cdot g+\int f\cdot g' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f\cdot g'=f\cdot g-\int f'\cdot g$$

Esta última fórmula la vamos a recoger en una tabla[1] con tres columnas, encabezadas con las letras S (signo), D (derivar) e I (integrar). En la primera fila de la tabla se colocan el signo +, la función f y la función g'; debajo aparecen el signo -, la derivada de f y la integral (una primitiva) de g':

S	D	I
+	f	g'
-	f'	g

La relación entre la tabla y la fórmula es obvia:

S	D	I
+	f	g'
-	f'	g

$$\longleftrightarrow \quad \boxed{\int f\cdot g'} = +f\cdot g \ \boxed{-\int f'\cdot g}$$

Si multiplicamos los dos miembros de la fórmula por -1, la tabla correspondiente queda modificada de la siguiente forma:

S	D	I
-	f	g'
+	f'	g

$$\longleftrightarrow \quad \boxed{-\int f\cdot g'} = -f\cdot g \ \boxed{+\int f'\cdot g}$$

Por ejemplo, calculemos la siguiente integral:

$$\int x\cdot \operatorname{sen} x\cdot dx$$

Construimos la tabla S/D/I:[2]

S	D	I
+	x	$\operatorname{sen} x$
-	1	$-\cos x$

[1] Este procedimiento se conoce con el nombre de *método tabular de integración por partes*.
[2] Una ventaja del método tabular con respecto al tradicional (en el que se aplica directamente la fórmula) es que no se pierde demasiado tiempo en descartar un camino errado (es lo que habríamos hecho en este ejemplo si hubiéramos empezado probando la tabla alternativa $+/\operatorname{sen} x/x$). Otra ventaja es que la comprobación de las integrales realizadas en la columna I resulta ser muy cómoda, basta derivar de abajo arriba dicha columna. Aunque la mayor de las ventajas es que se ahorra espacio y sobre todo tiempo.

Por tanto:

$$\int x\cdot\operatorname{sen}x\cdot dx=-x\cdot\cos x+\int\cos x\cdot dx$$

Como esta última integral es inmediata de tipo seno, queda:

$$\int x\cdot\operatorname{sen}x\cdot dx=-x\cdot\cos x+\operatorname{sen}x\cdot dx$$

* * *

Si en el cálculo de una integral por partes, $\int f_1\cdot g_1$, hubiera que reiterar el método, las sucesivas tablas pueden sustituirse con ventaja por sólo una.

En efecto, aplicamos a la integral de partida el método de integración por partes, construyendo su correspondiente tabla (filas 1ª y 2ª de la siguiente tabla), lo que permite dar el paso (a). Si el cálculo de la integral $\int f_2\cdot g_2$ requiere del método de integración por partes, construimos allí mismo la tabla correspondiente a dicha integral, incluido el signo negativo que la precede[1] (filas 2ª y 3ª), lo que permite dar el paso (b). Si también la integral $\int f_3\cdot g_3$ requiere de dicho método, construimos a continuación su tabla (filas 3ª y 4ª), lo que permite dar el paso (c). Etc.:

	S	D	I	
(a)	+	f_1	g_1	
	-	f_2	g_2	(b)
(c)	+	f_3	g_3	
	-	f_4	g_4	

$$\int f_1\cdot g_1 \overset{a}{=} f_1\cdot g_2-\int f_2\cdot g_2 \overset{b}{=} f_1\cdot g_2-f_2\cdot g_3+\int f_3\cdot g_3 \overset{c}{=} f_1\cdot g_2-f_2\cdot g_3+f_3\cdot g_4-\int f_4\cdot g_4$$

No es difícil relacionar esta tabla y el resultado final obtenido, lo que nos evita tener que dar todos los pasos intermedios:

S	D	I
+	f_1	g_1
-	f_2	g_2
+	f_3	g_3
-	f_4	g_4

$$\longleftrightarrow \quad \boxed{\int f_1\cdot g_1}=+f_1\cdot g_2-f_2\cdot g_3+f_3\cdot g_4\ \boxed{-\int f_4\cdot g_4}$$

La tabla se prosigue hasta obtener un producto $f_n\cdot g_n$:

1º) que sabemos integrar;

2º) relacionado con $f_1\cdot g_1$;

3º) cuya integración por partes requiere reagrupar las funciones en las columnas D/I de otro modo a como están.

[1] Ya hemos visto antes cómo se procede en este caso.

1º) Veamos un ejemplo del primer tipo:

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$$

Construimos la tabla S/D/I:

S	D	I
+	x^2	e^x
-	$2x$	e^x
+	2	e^x
-	0	e^x

Por tanto:[1]

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$$

2º) Las integrales del segundo tipo presentan dos variantes:

a) La relación de la última fila y la primera es *directa* (son iguales, salvo una constante). Veamos un ejemplo:

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

Construimos la tabla S/D/I:[2]

S	D	I
+	$\operatorname{sen} x$	e^x
-	$\cos x$	e^x
+	$-\operatorname{sen} x$	e^x

Por tanto:[3]

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = e^x \cdot \operatorname{sen} x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = (\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot e^x + C$$

b) La relación de la última fila y la primera es *indirecta* (mediante alguna fórmula conocida, etc.). Veamos un ejemplo:[4]

$$\int \cos^2 x \cdot dx$$

Construimos la tabla S/D/I:

S	D	I
+	$\cos x$	$\cos x$
-	$-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sen} x$

---

[1] Observa que nos hubiéramos podido parar en la penúltima fila, ya que se trata de una integral inmediata de tipo exponencial. Sin embargo, es más cómodo hacer lo que hemos hecho, pues la integral de la última fila, al ser la integral de la función cero, nos da directamente la constante de integración. Lo mismo podríamos haber hecho en el ejemplo anterior.

[2] En este caso, la tabla alternativa $(+/e^x/\operatorname{sen} x)$ también funciona.

[3] Nos hemos parado en la tercera fila porque coincide con la primera, salvo el signo.

[4] Esta integral también puede hacerse por *descomposición* mediante la fórmula del coseno del ángulo doble.

Por tanto:[1]

$$\int \cos^2 x \cdot dx = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x \cdot dx = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int (1-\cos^2 x) \cdot dx \overset{2}{=}$$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \int 1 \cdot dx - \int \cos^2 x \cdot dx \overset{3}{=} \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \int \cos^2 x \cdot dx = x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x \Rightarrow \int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + C$$

3º) Veamos un ejemplo del tercer tipo:

$$\int \ln^2 x \cdot dx$$

Al construir la tabla (filas 1ª y 2ª), nos paramos en la segunda fila porque advertimos que al agrupar sus factores de otro modo (fila 3ª) podemos calcular su integral por partes (filas 3ª y 4ª):[4]

S	D	I
+	$\ln^2 x$	1
-	$2 \cdot \ln x \cdot 1/x$	x
-	$\ln x$	2
+	$1/x$	2x

Al contrario de lo que sucedía en los dos tipos anteriores, en los que las sucesivas tablas se solapaban, en éste es forzoso escribirlas una tras otra (por eso las hemos separado por una línea horizontal).

Sin embargo, el resultado final se obtiene directamente de la tabla igual que siempre, salvo que no se escriben los "productos escalonados" que "cruzan" una línea horizontal:[5]

$$\int \ln^2 x \cdot dx = x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + \int 2 \cdot dx$$

Sólo falta calcular la última integral:[6]

$$\int \ln^2 x \cdot dx = x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + 2x + C$$

* * *

Antes de aplicar el método de integración por partes, es conve-

[1] Nos hemos parado en la segunda fila porque está relacionada con la primera mediante la fórmula fundamental de la trigonometría.
[2] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[3] La primera integral es inmediata de tipo potencial.
[4] Nos hemos parado en la cuarta fila porque se trata de una integral inmediata de tipo potencial.
[5] En este caso, el "producto escalonado" $(-2 \cdot \ln x \cdot 1/x) \cdot 2$. La razón es que, como siempre, la integral de la primera fila es igual al "producto escalonado" más la integral (con su signo, claro está) de la segunda fila; pero ésta es igual a la integral de la tercera fila, la que a su vez es igual al "producto escalonado" más la integral de la última fila.
[6] Si haces el cambio de variable $\ln x = t$ antes de aplicar el método de integración por partes, esta integral se convierte en una del primer tipo, que ya hemos calculado.

niente en algunos casos transformar la función integrando (con un cambio de variable adecuado, mediante alguna fórmula conocida, etc.). El cálculo de la siguiente integral, por ejemplo, se simplifica aplicándole la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$\int(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)\cdot x\cdot dx$$

* * *

Por último, una cuestión que es clave: ¿qué función colocamos en la columna D de la tabla? Pues bien, existen algunas reglas, como ALPES o LIATE, que nos lo indican. *En la columna D se coloca aquella función cuyo nombre aparece antes en cualquiera de las dos listas siguientes*:

Arco **L**ogarítmicas **P**otenciales, polinómicas[2] **E**xponenciales **S**eno, etc.[3]	**L**ogarítmicas **I**nversas[1] de las trigonométricas **A**lgebraicas **T**rigonométricas **E**xponenciales

Si te fijas, tanto las dos primeras funciones como las dos últimas de ambas listas aparecen en posiciones invertidas. Y es que en realidad no se trata de cinco grupos de funciones, sino sólo de tres. En el medio, y en eso coinciden ambas reglas, están las funciones algebraicas; en primer lugar las funciones arco y las logarítmicas;[4] y en último lugar, las trigonométricas y las exponenciales.[4] Si se recuerda que las funciones trigonométricas también se llaman goniométricas, las dos primeras sílabas de la palabra "algebraicas" nos pueden servir para recordar esta otra regla:

Arco **L**ogarítmicas	**ALGE** BRAI CAS	**G**oniométricas **E**xponenciales

Aunque no siempre funcionan, conviene retener al menos una de estas tres reglas. La siguiente integral, por ejemplo, puedes intentarla colocando la función algebraica en la columna D y la exponencial en la I, como dicen las reglas. Sin embargo, lo adecuado es poner la función $x\cdot e^x$ en la columna D y $1/(x+1)^2$ en la I:

$$\int\frac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}\cdot dx$$

[1] Las que nosotros hemos llamado *recíprocas*, esto es, las funciones arco.
[2] Se refiere a las funciones algebraicas, esto es, aquéllas en las que la variable y los números aparecen conectados mediante las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
[3] Las funciones trigonométricas.
[4] En el mismo nivel de prioridad.

2.- Problemas

1) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (x^2+2x)\cdot \operatorname{sen} x\cdot dx$ **b)** $\int x^3 \ln x\, dx$ **c)** $\int e^x\cdot \cos x\cdot dx$

d) $\int \ln x\cdot dx$ **e)** $\int \ln(1+x^2)\cdot dx$ **f)** $\int (\operatorname{arc\,sen} x)^2\cdot dx$

g) $\int x^2 \ln^2 x\, dx$ **h)** $\int \operatorname{arc\,sen} x\cdot dx$ **i)** $\int x^3\cdot \operatorname{sen} x\cdot dx$

j) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot dx$ **k)** $\int \frac{x}{\cos^2 x}\cdot dx$ **l)** $\int x^2\cdot e^{2x}\cdot dx$

m) $\int \operatorname{arc\,tg} x\cdot dx$ **n)** $\int \cos \ln x\cdot dx$ **ñ)** $\int 3^x\cdot \cos x\cdot dx$

o) $\int x\cdot \operatorname{arc\,tg} x\cdot dx$ **p)** $\int x^2\cdot \operatorname{arc\,tg} x\cdot dx$ **q)** $\int \ln^3 x\cdot dx$

r) $\int x\cdot \operatorname{tg}^2 x\cdot dx$ **s)** $\int x^3\cdot e^{x^2}\cdot dx$ **t)** $\int \operatorname{sen}^2 x\cdot dx$

u) $\int \frac{\ln \ln x}{x}\cdot dx$ **v)** $\int \frac{x\cdot \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ **w)** $\int \frac{x\cdot \cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\cdot dx$

x) $\int \frac{x}{e^x}\cdot dx$ **y)** $\int x\cdot \operatorname{sen} \ln x\cdot dx$ **z)** $\int e^x\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos x\cdot dx$

2) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen}(2x)\cdot \cos(3x)\cdot dx$ **b)** $\int \cos x\cdot \ln(1+\cos x)\cdot dx$

c) $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\cdot dx$ **d)** $\int \operatorname{sen} x\cdot \ln \cos x\cdot dx$

e) $\int \sqrt{x}\cdot \ln x\cdot dx$ **f)** $\int x\cdot \sqrt{2+x}\cdot dx$

g) $\int x\cdot \cos^2 x\cdot dx$ **h)** $\int x\cdot \ln(x+1)\cdot dx$

i) $\int \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{x}\cdot dx$ **j)** $\int e^x\cdot \cos^2 x\cdot dx$

k) $\int \frac{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot dx$ **l)** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\cdot dx$

m) $\int x\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos x\cdot dx$ **n)** $\int x\cdot \operatorname{arc\,cos} x^2\cdot dx$

ñ) $\int (\operatorname{arc\,cos} x)^3\cdot dx$ **o)** $\int \operatorname{arc\,sec}\sqrt{x}\cdot dx$

p) $\int x\cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}\cdot dx$ **q)** $\int \cos x\cdot (\ln \operatorname{sen} x)^2\cdot dx$

r) $\int \operatorname{sen}\sqrt{x+1}\cdot dx$ **s)** $\int \ln\sqrt{x+1}\cdot dx$

t) $\int e^{\sqrt{x}}\cdot dx$ **u)** $\int \frac{\operatorname{arc\,cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot dx$

3) La siguiente integral se puede hacer por partes. La segunda línea de la tabla está relacionada con la primera indirectamente. ¿Sabrías calcularla?:

$$\int \sqrt{1-x^2}\cdot dx$$

4) Determina f(x) si $f''(x)=x\cdot \ln x$, $f'(1)=0$ y $f(1)=1$.

5) Prueba que las siguientes integrales no son elementales:

a) $\int \ln \ln x\cdot dx$ **b)** $\int e^x\cdot \ln x\cdot dx$